ЗАДАНИЕ 11

G_2

Пусть A — алгебра с сопряжением (инволютивным антиавтоморфизмом). Определим алгебру A^2 на линейном пространстве $A \oplus A$ с умножением

$$(a,\, b)(u,\, v) = (au - \overline{v}b,\, b\overline{u} + va).$$

Задача 1. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{H}$.

Задача 2. Запишите таблицу умножения в алгебре *октавов* $\mathbb{O} = \mathbb{H}^2$. Будет ли эта алгебра ассоциативной?

Пусть $G_2 = Aut(\mathbb{O})$ — группа линейных преобразований, сохраняющих умножение.

Задача 3. Докажите, что G_2 — группа Ли, и что её алгебра Ли g_2 совпадает с алгеброй Ли $Der(\mathbb{O})$ дифференцирований $\mathbb{O}$.

Задача 4. Рассмотрим на $\mathbb{O}$ "скалярное" произведение $\langle u,\, v\rangle = u\overline{v} + v\overline{u}$. Докажите, что это скалярное произведение инвариантно, и что ортогональное дополнение к скалярам в $\mathbb{O}$ составлено мнимыми октавами (для которых $\overline{u} = -u$). Выведите отсюда, что $G_2 \subset O_7$.

Задача 5. Постройте g_2 как подалгебру Ли so_7 (задайте линейными уравнениями на коэффициенты в естественном базисе).

Задача 6. Докажите, что корневое разложение g_2 совпадает с системой корней G_2.

Задача 7. Вычислите центр G_2.

Задача 8. Докажите, что подгруппа $K \subset G_2$, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих $(i,\, 0)$, изоморфна $SU(3)$, и что $G_2/K \cong S^6$. Выведите отсюда, что G_2 связна и односвязна.