ЗАДАНИЕ 2

$GL_N(\mathbb{R})$, $SL_N(\mathbb{R})$, O_N

Обозначим $GL_n(\mathbb{R})$ группу невырожденных операторов из $\mathbb{R}^n$ в себя (с композицией в качестве операции). Пусть $gl_n(\mathbb{R})$ — алгебра Ли операторов из $\mathbb{R}^n$ в себя со скобкой $[A,B]=AB-BA$.

Задача 1. Докажите, что $GL_n(\mathbb{R})$ является группой Ли, $gl_n(\mathbb{R})$ — её алгеброй Ли, а матричная экспонента — экспоненциальным отображением из $gl_n(\mathbb{R})$ в $GL_n(\mathbb{R})$. Что будет образом экспоненциального отображения? Постройте подмножество $gl_n(\mathbb{R})$, задающее при экспоненциальном отображении карту окрестности единицы.

Обозначим $SL_n(\mathbb{R})$ подгруппу $GL_n(\mathbb{R})$, состоящую из операторов с единичным определителем.

Задача 2. Докажите, что $SL_n(\mathbb{R})$ является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{R})$, опишите её алгебру Ли $sl_n(\mathbb{R})\subset gl_n(\mathbb{R})$. Постройте базис в $sl_n(\mathbb{R})$, вычислите скобку в этом базисе. Что будет образом экспоненциального отображения? Постройте подмножество $sl_n(\mathbb{R})$, задающее при экспоненциальном отображении карту окрестности единицы.

Пусть теперь в $\mathbb{R}^n$ задано евклидово скалярное произведение. Обозначим O_n подгруппу $GL_n(\mathbb{R})$, состоящую из ортогональных операторов. Обозначим SO_n подгруппу O_n, состоящую из операторов с единичным определителем.

Задача 3. Докажите, что O_n является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{R})$, опишите её алгебру Ли $o_n\subset gl_n(\mathbb{R})$. Постройте базис в o_n, вычислите скобку в этом базисе. Что будет образом экспоненциального отображения? Постройте подмножество o_n, задающее при экспоненциальном отображении карту окрестности единицы.

Задача 4. Докажите, что SO_n — нормальная подгруппа и O_n/SO_n изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (с дискретной топологией). Выведите отсюда, что алгебры Ли у O_n и SO_n совпадают. Верно ли, что $O_n\cong SO_n\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Задача 5. Докажите, что группа O_n — компактна, а $SL_n(\mathbb{R})$ — нет (при $n>1$).

Задача 6. Докажите, что алгебры Ли $sl_n(\mathbb{R})$ и so_n — просты.

Задача 7. Докажите, что любая вещественная матрица однозначно раскладывается в произведение ортогональной матрицы и верхнетреугольной с неотрицательными вещественными числами на диагонали. Выведите отсюда, что $GL_n(\mathbb{R})$ и $SL_n(\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентны O_n и SO_n соответственно.

Задача 8. Докажите, что $SO_2\cong U_1$, $SO_3\cong SU_2/\{\pm\mathrm{Id}\}$, $SO_4\cong SU_2\times SU_2/\{\pm(\mathrm{Id}\times\mathrm{Id})\}$.

Задача 9. Докажите, что $O_n/O_{n-1}\cong SO_n/SO_{n-1}$ гомеоморфно S^{n-1}. Выведите отсюда, что группа SO_n — связна, и ее фундаментальная группа равна $\mathbb{Z}$ для $n=2$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для $n>2$.

Аналогично для подмножества $I=\{i_1<\dots<i_r\}\subset\{1,\dots n\}$ назовём *флагом* в $\mathbb{R}^n$ набор вложенных подпространств

$$0\subset V_{i_1}\subset V_{i_2}\subset\dots\subset V_{i_r}\subset\mathbb{C}^n,\qquad \dim V_i=i.$$

Задача 10. Убедитесь, что для заданного I множество флагов является однородным пространством как для $SL_n(\mathbb{R})$, так и для SO_n. Опишите индуцированную топологию в геометрических терминах. Какие матрицы стабилизируют флаг, в котором V_{i_j} порождено координатными векторами $e_1,e_2\dots e_{i_j}$ для $j=1\dots r$? Какие из этих матриц ортогональны?