Алгебры Ли: представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$

В этом листочке мы используем стандартный базис $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$. Все тождества, которые предлагается доказать, нужно понимать как тождества в универсальной обёртывающей алгебре этой алгебры Ли. Основное поле — поле комплексных чисел.

1. (**а**) Докажите, что $[h, e^n] = 2ne^n$.

(**б**) Докажите, что оператор e в любом конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ нильпотентен.

2. Докажите, что в любом конечномерном представлении $\mathfrak{sl}_2$ найдётся вектор, собственный для h и аннулируемый e.

3. (**а**) Докажите, что $[e, f^m] = mf^{m-1}(h - m + 1)$.

(**б**) Докажите, что

$$\left[\frac{e^m}{m!}, \frac{f^n}{n!}\right] = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \frac{f^{n-k}}{(n-k)!} \binom{h - m - n + 2k}{k} \frac{e^{m-k}}{(m-k)!}.$$

4. Докажите, что в каждом неприводимом конечномерном представлении V алгебры $\mathfrak{sl}_2$ найдётся вектор v, собственный для h с целым неотрицательным собственным значением n и аннулируемый e, причём векторы $v, fv, f^2v, \ldots, f^nv$ образуют базис пространства V. Такое представление обозначается $L(n)$.

5. Пусть V — конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$, V^e — ядро оператора e на этом пространстве. Докажите, что оператор h (очевидно, сохраняющий V^e) диагонализируем на V^e.

6. Докажите, что любое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$ раскладывается в прямую сумму неприводимых.

Характер представления $\mathfrak{sl}_2$ — это след оператора q^h (т. е. сумма q^λ по всем собственным значениям λ этого оператора (с кратностями)); q правильно считать формальным параметром или же комплексным числом. Например, характер $L(n)$ равен

$$q^n + q^{n-2} + \ldots + q^{-n}.$$

7. Докажите, что два представления $\mathfrak{sl}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда их характеры равны.

8. Докажите, что

$$L(n) \otimes L(m) \simeq L(n+m) \oplus L(n+m-2) \oplus \ldots \oplus L(|n-m|).$$

9. Вычислите характер $S^m L(n)$ (m-й симметрической степени $L(n)$) и докажите, что $S^m L(n) \simeq S^n L(m)$.