ЗАДАНИЕ 4

$O_N(\mathbb{C})$, $O_{M,N}$

Для симметрической билинейной формы в $\mathbb{R}^{m+n}$ сигнатуры (m,n) обозначим $O_{m,n} \subset GL_{m+n}(\mathbb{R})$ подгруппу операторов, сохраняющих эту форму. В частности, $O_n = O_{n,0} \cong O_{0,n}$.

Задача 1. Докажите, что $O_{m,n}$ являются подгруппами Ли в $GL_{m+n}(\mathbb{R})$, опишите их алгебры Ли $o_{m,n} \subset gl_{m+n}(\mathbb{R})$. Постройте базис $o_{m,n}$ и вычислите скобку в этом базисе.

Для невырожденной симметрической билинейной формы в $\mathbb{C}^n$ обозначим $O_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ подгруппу операторов, сохраняющих эту форму.

Задача 2. Докажите, что $O_n(\mathbb{C})$ является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{C})$, опишите её алгебру Ли $o_n(\mathbb{C}) \subset gl_n(\mathbb{C})$. Постройте базис $o_n(\mathbb{C})$ и вычислите скобку в этом базисе.

Задача 3. Докажите, что комплексификация $o_{m,n}$ совпадает с $o_{m+n}(\mathbb{C})$.

Задача 4. Найдите центр $O_{m,n}$ и $O_n(\mathbb{C})$.

Задача 5. Докажите, что алгебра Ли $o_n(\mathbb{C})$ — проста (как алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$). Выведите отсюда, что все $o_{m,n}$ — просты (как алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$).

Задача 6. Докажите, что $O_{m,n}/SO_{m,n} \cong O_{m+n}(\mathbb{C})/SO_{m+n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, где SO — подгруппа, состоящая из матриц с единичным определителем. В каких случаях $O_{m,n}$ распадается в прямое произведение?

Задача 7. Докажите, что $O_{m,n}$ — компактна только если $m = 0$ или $n = 0$.

Задача 8. Докажите, что $o_{1,1} \cong \mathbb{R}$, $o_{2,1} \cong sl_2(\mathbb{R})$. Что можно сказать о соответствующих группах?

Задача 9. Докажите, что $o_{2,2} \cong sl_2(\mathbb{R}) \oplus sl_2(\mathbb{R})$, $o_{3,1} \cong sl_2(\mathbb{C})$ (как алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$). Что можно сказать о соответствующих группах?

Задача 10. Докажите, что $O_{m,n}/O_m \times O_n$ — стягиваемо, и, следовательно, $O_{m,n}$ гомотопически эквивалентна $O_m \times O_n$.