ЗАДАНИЕ 5
ФОРМУЛА КЭМПБЕЛЛА–ХАУСДОРФА

Задача 1. Докажите, используя теорему Пуанкаре-Биркгоффа-Витта, что для $x \in U(\mathfrak{g})$ имеет место $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$.

Пусть $U(\mathfrak{g})((t))$ — алгебра формальных рядов от t с коэффициентами в $U(\mathfrak{g})$. Коумножение Δ однозначно продолжается с $U(\mathfrak{g})$ на $U(\mathfrak{g})((t))$ так, что

$$\Delta\left(\sum t^i x_i\right) = \sum t^i \Delta(x_i) \in (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))((t)).$$

Пусть $tU(\mathfrak{g})((t))$ — идеал рядов без свободного члена.

Для формального ряда $x \in tU(\mathfrak{g})((t))$ определим следущий формальный ряд

$$\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots \in U(\mathfrak{g})((t)).$$

Задача 2. Докажите, что если $x \in tU(\mathfrak{g})((t))$ и $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, то $\Delta(\exp(x)) = \exp(x) \otimes \exp(x)$.

Для $z = 1 + tz_1 + t^2 z_2 + \cdots \in 1 + tU(\mathfrak{g})((t))$ определим формальный ряд

$$\ln z = (z-1) - (z-1)^2/2 + (z-1)^3/3 - (z-1)^4/4 + \cdots \in tU(\mathfrak{g})((t)).$$

Задача 3. Докажите, что $\ln(\exp(x)) = x$, $\exp(\ln(z)) = z$.

Задача 4. Докажите, что если $z \in 1 + tU(\mathfrak{g})((t))$ и $\Delta(z) = z \otimes z$, то $\Delta(\ln(z)) = 1 \otimes \ln(z) + \ln(z) \otimes 1$.

Задача 5. Докажите, что $\exp(tx)\exp(ty) = \exp(z(x,y))$, где

$$z(x,y) = \ln(\exp(tx)\exp(ty)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{p_1,q_1,\ldots,p_k,q_k \geq 0 \\ p_i+q_i>0,\ i=1\ldots k}} t^{p_1+q_1+\cdots+p_k+q_k} \frac{x^{p_1}y^{q_1}\ldots x^{p_k}y^{q_k}}{p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!}.$$

Задача 6. Докажите, используя коумножение, что если $x, y \in \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$, то все коэффициенты ряда $z(x,y) \in U(\mathfrak{g})((t))$ тоже принадлежат $\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$.

Для векторного пространства V пусть $\mathcal{L}(V)$ — свободная алгебра Ли, порождённая V. Пусть $T(V)$ — свободная ассоциативная (она же тензорная) алгебра, порождённая V.

Задача 7. Докажите, что $U(\mathcal{L}(V)) \cong T(V)$.

Пусть $\iota : \mathcal{L}(V) \to T(V)$ — естественное вложение. Пусть $\sigma : T(V) \to \mathcal{L}(V)$ — линейное отображение, определённое посредством

$$\sigma(v_1 \ldots v_n) = \mathrm{ad}_{v_1}\mathrm{ad}_{v_2}\ldots\mathrm{ad}_{v_{n-1}}v_n = [v_1,[v_2,\ldots[v_{n-1},v_n]\ldots]], \qquad v_i \in V.$$

Определим градуировку на $T(V)$ полагая $\deg v_1 \ldots v_n = i$. Аналогично определим градуировку на $\mathcal{L}(V)$ полагая $\deg[v_1,[v_2,\ldots[v_{n-1},v_n]\ldots]] = i$.

Задача 8. Докажите, что ι и σ сохраняют эту градуировку.

Задача 9. Докажите, что $d = \sigma \circ \iota$ является дифференцированием $\mathcal{L}(V)$, то есть

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)], \qquad x, y \in \mathcal{L}(V).$$

Задача 10. Пусть $z \in T(V)$ имеет степень n. Докажите, что z принадлежит образу ι тогда и только тогда, когда $\iota(\sigma(z)) = nz$.

Задача 11. Докажите, что в обозначениях Задачи 5 для $x, y \in \mathcal{L}(V)$ имеет место формула

$$z(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{\substack{p_1,q_1,\ldots,p_k,q_k \geq 0 \\ p_i+q_i>0,\ i=1\ldots k}} \frac{t^{p_1+q_1+\cdots+p_k+q_k}}{p_1+q_1+\cdots+p_k+q_k} \frac{\sigma\left(x^{p_1}y^{q_1}\ldots x^{p_k}y^{q_k}\right)}{p_1!q_1!\ldots p_k!q_k!}.$$

Докажите, что эта формула работает и для произвольной алгебры Ли.

Задача 12. Вычислите $z(x,y)$ с точностью до $o(t^3)$.