ЗАДАНИЕ 6

$GL_N(\mathbb{H})$, UH_N, SP_{2N}

Пусть $\mathbb{H}$ — алгебра кватернионов. Рассмотрим свободный (скажем, правый) модуль $\mathbb{H}^n$. Пусть $GL_n(\mathbb{H})$ — группа автоморфизмов этого модуля.

Задача 1. Докажите, что $GL_n(\mathbb{H})$ является группой Ли, опишите её алгебру Ли $gl_n(\mathbb{H})$. Постройте базис $gl_n(\mathbb{H})$ над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, вычислите скобку в этих базисах.

Зададим скалярное (гиперэрмитовое?) произведение на $\mathbb{H}^n$ так:

$$((\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots \eta_n)) = \xi_1 \overline{\eta_1} + \dots + \xi_n \overline{\eta_n}.$$

Обозначим UH_n подгруппу $GL_n(\mathbb{H})$, состоящую из автоморфизмов, сохраняющих эту форму.

Задача 2. Докажите, что UH_n является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{H})$, опишите её алгебру Ли $uh_n \subset gl_n(\mathbb{H})$. Постройте базис uh_n над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, вычислите скобку в этих базисах.

Задача 3. Докажите, что UH_n — компактна. Вычислите центр UH_n.

Задача 4. Докажите, что $UH_1 \cong SU_2$.

Задача 5. Докажите, что $UH_n/UH_{n-1} \cong S^{4n-1}$. Выведите отсюда, что все UH_n связны и односвязны.

Пусть $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и в K^{2n} задана невырожденная симплектическая форма. Обозначим $SP_{2n}(K)$ подгруппу операторов, сохраняющих эту форму.

Задача 6. Докажите, что $SP_{2n}(K)$ является подгруппой Ли в $GL_{2n}(K)$, опишите её алгебру Ли $sp_{2n}(K) \subset gl_{2n}(K)$. Постройте базис sp_{2n} над K и вычислите скобку в этом базисе.

Задача 7. Докажите, что $SP_2(K) \cong SL_2(K)$.

Задача 8. Докажите, что вещественная и мнимая часть эрмитовой формы является симметрической и симплектической формой соответственно, то есть $U_n = O_{2n} \cap SP_{2n}(\mathbb{R})$. Аналогично докажите, что $UH_n = SU_{2n} \cap SP_{2n}(\mathbb{C})$.

Задача 9. Докажите, что комплексификация uh_n совпадает с $sp_{2n}(\mathbb{C})$.

Задача 10. Докажите, что $sp_{2n}(\mathbb{C})$ — проста. Выведите отсюда, что uh_n и $sp_{2n}(\mathbb{R})$ — просты.

Задача 11. Докажите, что $sp_4(\mathbb{C}) \cong so_5(\mathbb{C})$. Что можно сказать о соответсвующих группах?