ЗАДАНИЕ 7–8
СИСТЕМЫ КОРНЕЙ

Для $\alpha \in \mathbb{R}^n$ пусть $s_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отражение относительно гиперплоскости, перпендикулярной α.

Задача 1. Докажите, что $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

Системой корней называется набор R ненулевых векторов в $\mathbb{R}^n$, таких что
1) R порождает $\mathbb{R}^n$,
2) для α, $\beta \in R$ выполнено $s_\alpha(\beta) \in R$,
3) для α, $\beta \in R$ выполнено $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$.

Задача 2. Найдите все системы корней в $\mathbb{R}$.

Будем называть систему корней *приведённой*, если у неё нет сонаправленных векторов.

Задача 3. Докажите, что любая система корней содержит приведённую.

Задача 4. Пусть ϕ — угол между корнями. Докажите, что $4\cos^2\phi$ — целое число. Выведите отсюда, что любая система корней состоит из конечного числа векторов. Как могут соотноситься длины корней при каждом ϕ?

Проведём гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, не содержащую корней. Назовём корни по одну сторону от неё *положительными.* Положительные корни, не представимые в виде суммы двух положительных корней, назовём *простыми.*

Задача 5. Докажите, что простые корни не могут образовывать острый угол. Выведите отсюда, что простые корни образуют базис $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. Докажите, что любой корень можно перевести в простой или пропорциональный ему с помощью отражений. Выведите отсюда, что приведённая система корней определяется набором простых векторов.

Пусть α_i, $i = 1 \dots n$, — простые корни. Определим матрицу Картана $(n_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ посредством

$$n_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j).$$

Задача 7. Докажите, что матрица Картана — целочисленная и положительно определённая (определители главных миноров положительны). Докажите, что её главные миноры — матрицы Картана подсистем корней.

Задача 8. Пусть $n = 2$. Докажите, что матрица Картана равна (с точностью до перенумировки простых корней) одной из следующих:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(iv)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Нарисуйте соответствующие системы корней (в том числе неприведённые).

Диаграммой Дынкина назовём граф с рёбрами одного из следующих видов:

(i) $\circ \qquad \circ$ (ii) $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ (iii) $\circ\!\!\Longrightarrow\!\!\circ$ (iv) $\circ\!\!\Rrightarrow\!\!\circ$

Сопоставим матрице Картана такой граф, в котором вершины нумеруют простые корни, а рёбра (i)-(iv) кодируют соответствующий 2×2 минор (для (iii) и (iv) направление стрелки — в сторону более короткого простого корня).

Задача 9. Докажите, что декартовому произведению систем корней соответствует несвязное объединение диаграмм Дынкина.

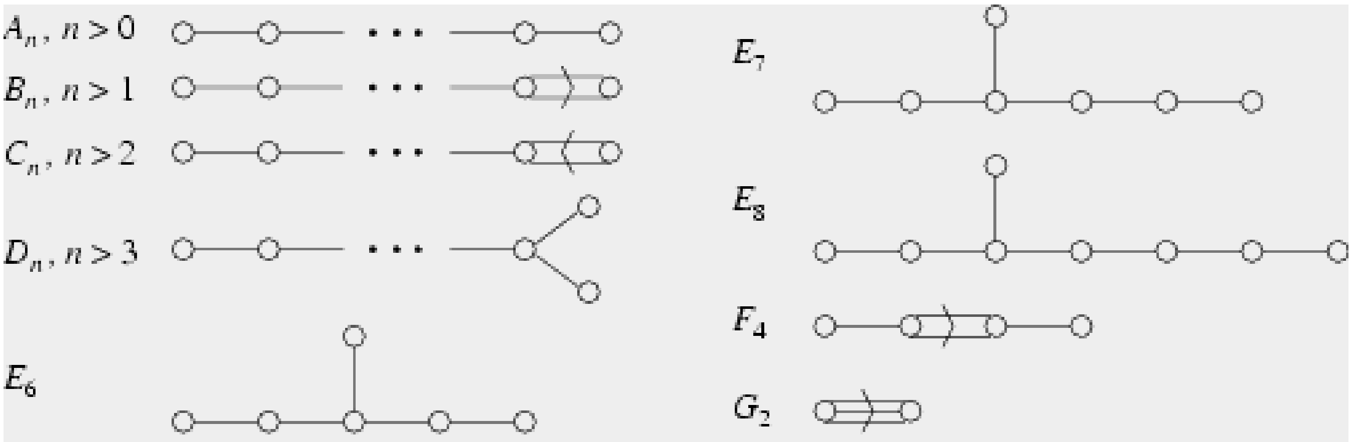
И наоборот, всякой диаграмме соответствует по этому правилу *обобщённая* матрица Картана. Если она положительно определена, то диаграмма Дынкина называется *конечного типа.*

Задача 10. Вычислите определитель обобщённых матриц Картана следующих графов:

Могут ли диаграммы конечного типа содержать такие подграфы?

Задача 11. Нарисуйте все диаграммы конечного типа для $n = 3$.

Задача 12. Докажите, что связные диаграммы конечного типа исчерпываются следующим списком:



Задача 13. Постройте системы корней для этих диаграмм (в том числе неприведённые). Убедитесь, что они попарно неизоморфны.

Задача 14. Докажите, что диаграмма A_n соответствует системе корней SU_{n+1}, B_n — SO_{2n+1}, C_n — SP_{2n}, D_n — SO_{2n}.

Задача 15. Классифицируйте *аффинные* диаграммы Дынкина — для которых обобщённая матрица Картана положительно полуопределена и имеет ранг $n - 1$.