ЗАДАНИЕ 9
КЛАССИЧЕСКИЕ СЕРИИ

Задача 1. Докажите, что *классические серии* систем корней реализуются в следующем виде. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \{v_i - v_j\}_{1 \le i,j \le n+1} \subset L \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad & B_n &= \{\pm v_i,\, \pm v_i \pm v_j\}_{1 \le i,j \le n} \subset \mathbb{R}^n, \\ C_n &= \{\pm 2v_i,\, \pm v_i \pm v_j\}_{1 \le i,j \le n} \subset \mathbb{R}^n, \quad & D_n &= \{\pm v_i \pm v_j\}_{1 \le i,j \le n} \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Задача 2. Докажите, что система корней A_n соответствует корневому разложению SU_{n+1}, B_n — SO_{2n+1}, C_n — SP_{2n}, D_n — SO_{2n}.

Задача 3. Для каждой из этих систем корней найдите *старший корень* — положительный корень, разность которого с любым другим корнем положительна (является линейной комбинацией простых корней с неотрицательными коэффициентами).

Задача 4. Для корня α определим *двойственный корень* $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$. Докажите, что множество $R^\vee = \{\alpha^\vee | \alpha \in R\}$ образует систему корней. Как связаны матрицы Картана и диаграммы Дынкина R и $R^\vee$? Кто из классических серий кому двойственен?

Пусть $Q = \mathbb{Z}R$ — решётка, порождённая корнями. Определим *решётку весов* $P = \{\lambda | 2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}\}$.

Задача 5. Докажите, что P — решётка, содержащая Q, и что количество элементов в факторе P/Q равно определителю матрицы Картана.

Задача 6. Вычислите P/Q для классических серий.

Задача 7. Для каждой из этих систем корней вычислите *группу Вейля* - подгруппу линейных преобразований, порождённую отражениями относительно корней. Совпадает ли она с группой всех линейных преобразований, сохраняющих систему корней?