ЗАДАНИЕ 10
ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СЕРИЙ

Задача 1. Найдите характер и старший вес комплексификации V векторного представления SU_n, SO_n, UH_n.

Задача 2. Найдите характер и старший вес двойственного представления V^* для SU_n, SO_n, UH_n. Когда $V \cong V^*$?

Задача 3. Докажите, что при тензорном умножении старшие веса складываются, а при возведении в k-тую симметрическую степень - умножаются на k.

Задача 4. Найдите старшие веса внешних степеней $\wedge^k V$ комплексификации векторного представления SU_n, SO_n, UH_n.

Задача 5. Докажите, что всякое неприводимое представление SU_n является для некоторых $k_1, \ldots, k_m$ подпредставлением $\wedge^{k_1} V \otimes \cdots \otimes \wedge^{k_m} V$, порождённым произведением старших векторов. Верно ли это для SO_n и UH_n?

Задача 6. Докажите, что симметрические и внешние степени векторного представления SU_n неприводимы. Что из этого верно для SO_n и UH_n?

Задача 7. Докажите, что характер тензорного произведения представлений равен произведению характеров. Чему равен характер симметрического и внешнего квадрата представления?

Задача 8. Выведите формулы для характера симметрических и внешних степеней представления.