ДОМАШНИЙ ЭКЗАМЕН
2.12.2005 – 16.12.2005

Задача 1. Рассмотрим алгебру Ли Гейзенберга $\mathcal{H}$ с базисом p, q, h и коммутатором $[p,q]=h$, $[h,p]=[h,q]=0$. Определите структуру группы Ли на многообразии $\mathbb{R}^3$, алгебра Ли которой изоморфна $\mathcal{H}$.

Задача 2. Сколько существует (с точностью до сопряжения элементом $GL_5(\mathbb{C})$)

a) подалгебр $\mathfrak{gl}_5(\mathbb{C})$, изоморфных $\mathfrak{su}_2$,

b) подгрупп $GL_5(\mathbb{C})$, изоморфных SU_2,

c) подгрупп $GL_5(\mathbb{C})$, изоморфных SO_3?

Подсказка: вспомните определение представления.

Задача 3.

a) Нарисуйте систему корней G_2 в $\mathbb{R}^2$.

b) Укажите простые корни и старший корень в G_2. Докажите, что старший корень с одним из простых корней (укажите каким!) порождают систему корней A_2.

Пусть $\mathfrak{g}_2$ — комплексная простая алгебра Ли, соответствующая системе корней G_2. Обозначим $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}_2$ подалгебру, порождённую корневыми пространствами подсистемы корней A_2.

c) Докажите, что $\mathfrak{a}$ изоморфна $\mathfrak{sl}_3$.

d) Докажите, что представление $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}_2$ изоморфно $V\oplus\mathfrak{a}\oplus V^*$, где V — векторное представление $\mathfrak{sl}_3$.

e) Докажите, что коммутатор элементов V принадлежит V^*, коммутатор элементов V^* принадлежит V, а коммутатор элементов V и V^* принадлежит $\mathfrak{a}$.

f) Докажите, что нетривиальные отображения $\wedge^2 V\to V^*$, $\wedge^2 V^*\to V$ и $V\otimes V^*\to\mathfrak{a}$ единственны с точностью до пропорциональности.

g) Выразите в терминах отображений представлений коммутатор в $\mathfrak{g}_2$.

Задача 4.

a) Докажите, что система корней F_4 реализуется в $\mathbb{R}^4$ как

$$\left\{\pm e_i,\ \pm e_i\pm e_j,\ \frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)\right\},$$

где e_1, e_2, e_3, e_4 — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^4$.

b) Укажите простые корни и старший корень в F_4. Докажите, что старший корень с тремя из простых корней (укажите какими!) порождают систему корней B_4.

Пусть $\mathfrak{f}_4$ — комплексная простая алгебра Ли, соответствующая системе корней F_4. Обозначим $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{f}_4$ подалгебру, порождённую корневыми пространствами подсистемы корней B_4.

c) Докажите, что $\mathfrak{a}$ изоморфна $\mathfrak{so}_9$.

d) Докажите, что представление $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{f}_4$ однозначно раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{a}\oplus U$.

e) Докажите, что коммутатор элементов U принадлежит $\mathfrak{a}$.

f) Докажите, что представление U неприводимо. Найдите его старший вес.

g) Докажите, что нетривиальное отображение $\wedge^2 U\to\mathfrak{a}$ единственно с точностью до пропорциональности.

h) Выразите в терминах отображений представлений коммутатор в $\mathfrak{f}_4$.

Решения задач в письменном виде сдавайте не позднее **16 декабря (пятница)** С.М.Львовскому (или в его почтовую ячейку). Вопросы можно (и нужно) задавать по адресу **loktev@mccme.ru**