Представления алгебр Ли: введение

Основные определения

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли. Представление этой алгебры — гомоморфизм в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$ всех линейных преобразований некоторого векторного пространства V.*

Пример 1. *Для любой алгебры Ли $\mathfrak{A}$ определено присоединённое представление $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$. То, что это гомоморфизм, следует из тождества Якоби.*

Обычный словарик теории представлений есть и в этом случае. Стандартным образом определяются неприводимое представление и доказывается лемма Шура.

Определим тензорное произведение двух представлений. Пусть $\alpha\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\beta\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{gl}(W)$ — два представления. Тогда $\alpha\otimes\beta\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{gl}(V\otimes W)$ задаётся формулой $\alpha\otimes\beta(a) = \alpha(a)\otimes\mathrm{id} + \mathrm{id}\otimes\beta(a)$. (Проверьте, что это гомоморфизм!) Для представления в пространстве V можно построить представление в n-й тензорной степени этого пространства. Симметрическая и внешняя степень сохраняются алгеброй и тоже являются важными примерами представлений.

Пример 2. *Неприводимые представления абелевой алгебры Ли одномерны.*

Пример: представления двумерной неабелевой алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{A} = \langle x, y\rangle$ — двумерная неабелева алгебра Ли. Как известно, можно считать, что $[x, y] = y$. Классифицируем (комплексные) неприводимые представления этой алгебры. Для краткости будем обозначать элемент алгебры и его действие в представлении одной и той же буквой.

Рассмотрим собственный вектор v оператора x: $x(v) = \lambda x$. Заметим, что

$$xy(v) = yx(v) + y(v) = (\lambda + 1)y(v).$$

Это значит, что вектор $y(v)$ тоже собственный, причём с собственным значением на 1 больше. Поскольку собственных значений конечное число, то после применения оператора y несколько раз получится нуль. Рассмотрим последний ненулевой вектор в последовательности $v, y(v), y^2(v), \ldots$ Он собственный и для x, и для y. Значит, любое представление содержит одномерное подпредставление, и неприводимые представления одномерны. В одномерном представлении x и y коммутируют, поэтому y действует нулём, а x умножает на некоторое число.

Универсальная обёртывающая алгебра

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра Ли. Мы хотим найти ассоциативную алгебру A, у которой та же категория представлений, что у $\mathfrak{A}$. Эта задача решается следующим образом.

Определение 2. *Универсальная обёртывающая алгебра — это ассоциативная алгебра A, для которой существует отображение $\alpha\colon \mathfrak{A} \to A$, являющееся гомоморфизмом алгебр Ли (если рассматривать на A структуру алгебры Ли, заданную коммутатором), причём выполняется следующее универсальное свойство: любой гомоморфизм $\beta\colon \mathfrak{A} \to B$ в ассоциативную алгебру B, являющийся гомоморфизмом алгебр Ли, пропускается через A, т. е. существует и единствен гомоморфизм $\eta\colon A \to B$, для которого $\beta = \eta \circ \alpha$.*

Предложение 1. *Определение задаёт алгебру A однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Между двумя такими алгебрами можно построить гомоморфизмы в обе стороны, причём композиции тождественны (в силу единственности, применяемой в случае $B = A$). □

Предложение 2. *Универсальная обёртывающая алгебра существует.*

Доказательство. Ясно, что универсальная обёртывающая алгебра порождена образом $\mathfrak{A}$. Это значит, что она является факторалгеброй тензорной алгебры $T^\bullet(\mathfrak{A})$. Есть очевидный способ профакторизовать тензорную алгебру. А именно, рассмотрим в ней идеал I, порождённый элементами $x \otimes y - y \otimes x = [x, y]$, где $x, y \in \mathfrak{A}$. Положим $U(\mathfrak{A}) = T^\bullet(\mathfrak{A})/I$. В эту алгебру, очевидно, можно отобразить $\mathfrak{A}$; α — композиция вложения $\mathfrak{A} \hookrightarrow T^\bullet(\mathfrak{A})$ и проекции $T^\bullet(\mathfrak{A}) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{A})$.

Докажем, что для построенной алгебры выполнено универсальное свойство. Действительно, пусть $\beta\colon \mathfrak{A} \to B$ — какое-нибудь отображение в ассоциативную алгебру. Это отображение продолжается до отображения $\beta'\colon T^\bullet(\mathfrak{A}) \to B$. Образующие идеала I лежат, очевидно, в ядре β', поэтому β' пропускается через факторизацию по I, что и требовалось. □

Пример 3. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ абелева. Тогда универсальная обёртывающая алгебра — $S^\bullet(\mathfrak{A})$ (симметрическая алгебра).*

Предложение 3. *Категории представлений алгебры $\mathfrak{A}$ и её универсальной обёртывающей алгебры эквивалентны.*

Доказательство. Если есть представление алгебры $U(\mathfrak{A})$, то его можно ограничить на подалгебру Ли $\mathfrak{A}$ и получить представление этой алгебры. Наоборот, если есть представление алгебры Ли $\mathfrak{A}$, то в силу универсального свойства алгебра $U(\mathfrak{A})$ отображается в соответствующую алгебру матриц. Ясно, что при этом $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{A})}(V, W)$, т. е. мы действительно построили эквивалентность категорий. □

Естественно выяснить что-то про универсальную обёртывающую алгебру. Например, разумно выяснить, насколько «большой» она является.

Предложение 4. *Упорядочим как-нибудь базис $\{e_i\}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ (если $\mathfrak{A}$ бесконечномерна, то рассмотрим полный порядок на базисных элементах). Тогда элементы $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$ порождают $U(\mathfrak{A})$ как векторное пространство.*

Доказательство. Докажем, что элемент $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}$ можно выразить через элементы такого вида, где индексы образуют неубывающую последовательность. Докажем это индукцией по n, а при фиксированном n — индукцией по числу беспорядков в последовательности $(i_1, \dots, i_n)$. Действительно, любой беспорядок $e_j e_i$ с $j > i$ можно исправлять с помощью формулы $e_j e_i = e_i e_j + [e_j, e_i]$. Второе слагаемое уменьшает n, первое — число беспорядков. □

Теорема 1 (Пуанкаре–Биркгоф–Витт). *Элементы $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$ образуют базис в $U(\mathfrak{A})$, т. е. всегда имеет место изоморфизм векторных пространств $U(\mathfrak{A}) \simeq S^\bullet(\mathfrak{A})$ (это не изоморфизм алгебр!).*

Замечание 1. *Теорему Пуанкаре–Биркгофа–Витта можно понимать так: в алгебре $U(\mathfrak{A})$ есть фильтрация: подпространство U_k состоит из всевозможных произведений $\alpha(a_1) \dots \alpha(a_l)$, где $a_i \in \mathfrak{A}$, $l \leqslant k$. По этой фильтрации можно рассмотреть присоединённую градуированную алгебру $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{A}) = U_0 \oplus \bigoplus_{k \geqslant 1} U_k/U_{k-1}$. Легко видеть, что алгебра $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{A})$ коммутативна, и потому является факторалгеброй симметрической алгебры $S^\bullet(\mathfrak{A})$ (ибо* *она порождена своей компонентой степени 1, на которую отображается $\mathfrak{A}$). Теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта утверждает, что каноническая проекция на факторалгебру на самом деле является изоморфизмом.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы построить большое представление алгебры $U(\mathfrak{A})$: в этом представлении найдётся вектор v, для которого все векторы $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n}(v)$, где $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$, будут линейно независимыми (а попросту базисными векторами). Это докажет требуемое утверждение.

Рассмотрим векторное пространство V с базисом $I = (i_1, \dots, i_n)$, где $i_1 \leqslant \dots \leqslant i_n$ — неубывающая последовательность индексов базисных элементов. Определим действие базисного элемента e_j алгебры $\mathfrak{A}$ на V индукцией по n, а при фиксированном n индукцией по j:

1) $e_j(I) = (j, i_1, \dots, i_n)$, если $j < i_1$;

2) $e_j(I) = e_{i_1}(e_j(J)) + [e_j, e_{i_1}](J)$, где J получается из I отбрасыванием i_1.

Докажем, что получилось представление алгебры $\mathfrak{A}$, т.е. для всех j, k, I имеем

$$e_j(e_k(I)) - e_k(e_j(I)) = [e_j, e_k](I).$$

Очевидно, достаточно рассмотреть случай $j > k$. Если $k \leqslant i_1 =: i$, то это равенство является определением действия e_j.Поэтому интересен лишь случай $j > k > i$. Будем вновь доказывать это утверждение индукцией по длине I, а при фиксированной длине — по паре (j, k) (где порядок на парах лексикографический). Мы хотим доказать, что $e_j(e_k(e_i(J))) - e_k(e_j(e_i(J))) = [e_j, e_k](e_i(J))$. Предположение индукции по паре (j, k) даёт

$$\begin{aligned} e_k(e_i(e_j(J))) - e_i(e_k(e_j(J))) &= [e_k, e_i](e_j(J)), \\ e_i(e_j(e_k(J))) - e_j(e_i(e_k(J))) &= [e_i, e_j](e_k(J)), \end{aligned}$$

а предположение индукции по n даёт

$$\begin{aligned} [e_i, e_j](e_k(J)) &= e_k([e_i, e_j](J)) + [[e_i, e_j], e_k](J), \\ [e_j, e_k](e_i(J)) &= e_i([e_j, e_k](J)) + [[e_j, e_k], e_i](J), \\ [e_k, e_i](e_j(J)) &= e_j([e_k, e_i](J)) + [[e_k, e_i], e_j](J). \end{aligned}$$

Используя эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} [e_j, e_k](e_i(J)) = -[e_i, e_j](e_k(J)) + e_k([e_i, e_j](J)) + e_i([e_j, e_k](J)) - \\ - [e_k, e_i](e_j(J)) + e_j([e_k, e_i](J)) = e_k([e_i, e_j](J)) + e_i([e_j, e_k](J)) + \\ + e_j([e_k, e_i](J)) - e_k(e_i(e_j(J))) + e_i(e_k(e_j(J))) - e_i(e_j(e_k(J))) + \\ + e_j(e_i(e_k(J))) = e_k([e_i, e_j](J) - e_i(e_j(J))) + e_i([e_j, e_k](J) + \\ + e_k(e_j(J)) - e_j(e_k(J))) + e_j([e_k, e_i](J) + e_i(e_k(J))) = \\ = -e_k(e_j(e_i(J))) + e_j(e_k(e_i(J))), \end{aligned}$$

что и требовалось (в последних преобразованиях ещё раз использовано предположение индукции по длине).

Теперь заметим, что применение $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_n}$ с $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n$ к базисному элементу, отвечающему пустой последовательности, даёт базисный элемент I, как мы и ожидали. Значит, указанные элементы образуют базис в алгебре. $\square$