ЛЕКЦИЯ 1

Содержание

1. Краткое напоминание из анализа на многообразиях

Этот раздел призван напомнить некоторые стандартные (по мнению лектора) факты из вышеназванной дисциплины. Кроме того, мы фиксируем некоторые неоднозначности типа выбора знаков.

В этом разделе X, Y — гладкие вещественные многообразия, если не оговорено противное.

1.1. Тензорные поля и действие диффеоморфизмов. Тензорное поле на многообразии X — (глобальное) сечение расслоения $T_i^j X = (TX)^{\otimes i} \otimes (T^*X)^{\otimes j}$. Если $\varphi : X \to Y$ — диффеоморфизм гладких многообразий, то мы имеем изоморфизм $\varphi_* : \Gamma(X, T_j^i X) \to \Gamma(Y, T_j^i Y)$ (через $\Gamma(X, V)$ мы обозначаем пространство глобальных сечений расслоения V над X). На $\Gamma(X, T_\bullet^\bullet X)$ имеется структура (биградуированной) алгебры (с тензорным умножением $\otimes$) и свертка. Отображение φ_* является изоморфизмом алгебр, перестановочным со сверткой.

В частности, группа $\mathrm{Diff}(X)$ диффеоморфизмов многообразия X действует (слева) автоморфизмами на $\Gamma(X, T_\bullet^\bullet(X))$. Отметим, что для $g \in \mathrm{Diff}(X), f \in C^\infty(X)$ имеет место равенство $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$.

1.2. Векторные поля и производные Ли. Векторное поле — это элемент из $\Gamma(X, TX)$. Множество векторных полей мы будем ещё обозначать через $\mathcal{V}ect(X)$.

Каждому $\xi \in \mathcal{V}ect(X)$ сопоставляется дифференцирование алгебры $C^\infty(X)$, а именно, производная по направлению векторного поля ξ, обозначается ∂_ξ. Отметим, что $\partial_\xi(f) = \langle \xi, df \rangle$. Таким образом, мы имеем линейное отображение $\xi \mapsto \partial_\xi : \mathcal{V}ect(X) \to \mathrm{Der}(C^\infty(X))$. Это отображение, очевидно, инъективно и $\mathrm{Diff}(X)$-эквивариантно (на $\mathrm{Der}(C^\infty(X))$ группа $\mathrm{Diff}(X)$ действует как на подпространстве в пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^\infty(X), C^\infty(X))$ линейных эндоморфизмов). Менее тривиальным фактом является то, что это отображение сюръективно.

Для двух дифференцирований $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(C^\infty(X))$ определен их коммутатор $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$, снова являющийся дифференцированием (проверьте) и превращающий

Der в алгебру Ли. Изоморфизм $\xi \mapsto \partial_\xi$ позволяет перенести структуру алгебры Ли с $\mathrm{Der}(C^\infty(X))$ на $\mathcal{V}ect(X)$. **Внимание**: мы полагаем, что отображение $\xi \mapsto \partial_\xi$ является **антиизоморфизмом** алгебр Ли, т.е. что $\partial_{[\xi,\eta]} = -[\partial_\xi, \partial_\eta]$.

Упражение 1. Распишите коммутатор двух векторных полей в координатах.

Понятно, что произвольное гладкое отображение $\varphi : X \to Y$ никак не переносит векторные поля с X на Y. Тем не менее, в некотором смысле φ уважает операцию коммутирования. А именно

Упражение 2. Векторные поля $\xi \in \mathcal{V}ect(X), \xi^1 \in \mathcal{V}ect(Y)$ называются φ- *согласованными*, если для всех $x \in X$ имеет место равенство $d_x\varphi(\xi) = \xi^1_{\varphi(x)}$. Покажите, что если $\xi, \eta \in \mathcal{V}ect(X), \xi^1, \eta^1 \in \mathcal{V}ect(Y)$ таковы, что ξ, ξ^1 и η, η^1 являются φ-согласованными, то то же верно для $[\xi, \eta], [\xi^1, \eta^1]$.

Перейдем теперь к производным Ли.

Каждому векторному полю можно сопоставить его поток, переносящий точку по интегральной траектории с соответствующей скоростью. Результат перенесения точки x потоком векторного поля ξ за время t мы будем обозначать через $\exp(t\xi)x$. Отображение $(t, x) \mapsto \exp(t\xi)x$ обладает следующими свойствами

1) Оно определено на некоторой окрестности U подмногообразия $X \times \{0\}$ в X (состоящей из таких пар (x, t), что точку x можно переносить потоком за время t). Эта окрестность удовлетворяет свойству $(x, t_1), (x, t_2) \in U \Rightarrow (x, t) \in U$ для всех $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

2) Отображение $x \mapsto \exp(t\xi)x$ из $\{x \in X | (x, -t) \in U\}$ в X является диффеоморфизмом на свой образ (иными словами, поток состоит из локальных диффеоморфизмов).

3) $\exp(0)x = x$ для всех x.

4) Предположим, что $(x, t_1) \in U$. Тогда точки $(x, t_1 + t_2), (\exp(t_1\xi)x, t_2)$ одновременно принадлежат или не принадлежат U и $\exp(t_2\xi)\exp(t\xi_1)x = \exp((t_1 + t_2)\xi)x$ (последние два свойства можно охарактеризовать как то, что поток является локальной однопараметрической группой).

Отображения $U \to X$ мы (не совсем точно) будем называть *локальными однопараметрическими группами диффеоморфизмов*, сокращенно л.о.г.д. Таким образом, каждому векторному полю можно сопоставить л.о.г.д. Обратно, каждая л.о.г.д является потоком некоторого однозначно определенного векторного поля. Поля, для которых поток определен глобально (для всех t и x) называются *полными*. Скажем, все векторные поля на компактном многообразии.

Все, что было сказано выше о действиях диффеоморфизмов на алгебрах тензорных полей, переносится (с естественными оговорками, касающимися локальности) на случай локальных диффеоморфизмов. В частности, для векторного поля ξ и тензорного поля τ, мы можем говорить о поле $\exp(t\xi)_*\tau$ в некоторой окрестности произвольной точки из X. Это позволяет нам определить *производную Ли* $L_\xi\tau$ как $\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(t\xi)_*\tau$.

Опишем свойства производной Ли.

1) Отображение $\xi \mapsto L_\xi : \mathcal{V}ect(X) \to \mathfrak{gl}(\Gamma(X, T^\bullet_\bullet(X)))$ линейно.

2) Коль скоро $\exp(t\xi)_*$ есть автоморфизм алгебры тензорных полей, перестановочный со свертками, то L_ξ является дифференцированием относительно этих операций. Скажем, для свертки $\langle\bullet,\bullet\rangle$ это означает, что $L_\xi\langle\tau_1, \tau_2\rangle = \langle L_\xi\tau_1, \tau_2\rangle + \langle\tau_1, L_\xi\tau_2\rangle$.

3) Для диффеоморфизма g (глобального или локального) имеет место равенство $g_* L_\xi g_*^{-1} = L_{g_*\xi}$.

4) Для функции $f \in C^\infty(X)$ имеем $L_\xi f = -\partial_\xi f$. Для векторного поля η — $L_\xi\eta = [\xi, \eta]$. Для доказательства последнего равенства достаточно заметить, что

$$\exp(t\xi)_*(\partial_\eta f) = \partial_{\exp(t\xi)_*\eta}(\exp(t\xi_*)f).$$

и продифференцировать в 0. Последнее равенство следует из эквивариантности отображения $\eta \mapsto \partial_\eta$ относительно диффеоморфизмов.

5) Равенство $L_\xi \tau = 0$ эквивалентно тому, что поле τ инвариантно относительно потока $\exp(t\xi)$.

6) $[L_\xi, L_\eta] = L_{[\xi,\eta]}$.

Упражнение 3. Докажите последнее равенство.

1.3. **Алгебра дифференциальных форм и её дифференцирования.** Дифференциальная i-форма на X — это сечение расслоения $\bigwedge^i T^*X$. Пространство дифференциальных форм мы будем обозначать через $\Omega^i(X)$. Также положим $\Omega(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim X} \Omega^i(X)$.

Для $\omega \in \Omega^i(X)$ и векторных полей $\xi_1, \ldots, \xi_i$ определена функция $\omega(\xi_1, \ldots, xi_i) \in C^\infty(X)$. Для $\omega \in \Omega^i(X), \theta \in \Omega^j(X)$ определено внешнее произведение $\omega \wedge \theta$, превращающее $\Omega(X)$ в градуированную алгебру. Эта алгебра ассоциативна, обладает единицей, и суперкоммутативна, т.е $\omega \wedge \theta = (-1)^{ij}\theta \wedge \omega$ для $\omega \in \Omega^i(X), \theta \in \Omega^j(X)$. Мы при этом будем считать, что умножение (или свертка с векторными полями) нормирована таким образом, что $dx^1 \wedge dx^2 \ldots dx^j(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 1$ (здесь $x^1, \ldots, x^i$ — координатные функции).

Пусть теперь $\varphi : X \to Y$ — гладкое отображение. Имеем гомоморфизм градуированных алгебр (pull-back) $\varphi^* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$. Отметим, что если φ — диффеоморфизм, то $\varphi^* = \varphi_*^{-1}$.

Обсудим теперь вопрос о дифференцированиях алгебры $\Omega(X)$. Поскольку алгебра $\Omega(X)$ не коммутативна, а суперкоммутативна, то понятие дифференцирования следует скорректировать.

Определение 1. Линейное отображение $D : \Omega(X) \to \Omega(X)$ назовем дифференцированием (или, что правильнее, *супердифференцированием*) степени i, если:

1) $D(\Omega^j(X)) \subset \Omega^{i+j}(X)$ для всех j.

2) $D(\omega \wedge \theta) = D\omega \wedge \theta + (-1)^{ij}\omega \wedge D\theta$ для $\omega \in \Omega^j(X), \theta \in \Omega(X)$.

Пространство всех дифференцирований степени i мы будем обозначать через $\mathrm{Der}_i(\Omega(X))$.

Приведем примеры дифференцирований:

1) Производная Ли L_ξ является дифференцированием степени 0.

2) Пусть ξ снова векторное поле. Определим *внутреннее произведение* ι_ξ следующим образом, для $\omega \in \Omega^i(X)$ пусть $\iota_\xi\omega$ — такая $i-1$-форма, что $\iota_\xi\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}) = \omega(\xi, \xi_1, \ldots \xi_{i-1})$ для всех $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1} \in \mathcal{V}ect(X)$. Внутренне произведение является дифференцированием степени -1 (проверьте).

3) Наконец, имеется некоторое выделенное внешнее дифференцирование степени 1, которое обозначается через d и называется *внешним дифференциалом.* Оно однозначно характеризуется следующими свойствами:

а) $d^2 = 0$.

б) Для $f \in C^\infty(X)$ внешний дифференциал d совпадает с дифференциалом функции f как отображения из X в $\mathbb{R}$.

в) Внешний дифференциал является естественным в следующем смысле. Пусть $\varphi : X \to Y$ — гладкое отображение. Тогда $\varphi^* d = d\varphi^*$ (здесь стоят два оператора на разных многообразиях).

Поскольку мы имеем дело не с обычными дифференцированиями, понятие коммутатора также нуждается в модификации.

Определение 2. Пусть $D_1 \in \mathrm{Der}_i(\Omega(X)), D_2 \in \mathrm{Der}_j(\Omega(X))$. Тогда *суперкоммутатор* дифференцирований D_1 и D_2 определяется формулой $[D_1, D_2]_+ = D_1 D_2 - (-1)^{ij} D_2 D_1$. Это дифференцирование (проверьте), имеющее степень $i + j$.

Установим суперкоммутационные соотношения между d, L_ξ, ι_ξ.

Предложение 3. *Для $\xi, \eta \in \mathcal{V}ect(X)$ имеют место следующие соотношения (равенство (1.3) называется "волшебной формулой Э. Картана"):*

$$[d,d]_+ = 0 \tag{1.1}$$

$$[d, L_\xi]_+ = 0 \tag{1.2}$$

$$[d, \iota_\xi]_+ = -L_\xi \tag{1.3}$$

$$[L_\xi, L_\eta]_+ = 0 \tag{1.4}$$

$$[L_\xi, \iota_\eta]_+ = \iota_{[\xi,\eta]} \tag{1.5}$$

$$[\iota_\xi, \iota_\eta]_+ = 0 \tag{1.6}$$

Доказательство. Мы докажем равенства (1.2), (1.5), остальное остается в качестве упражнения.

Для доказательства равенства (1.2) достаточно заметить, что $\exp(t\xi)_* d = d\exp(t\xi)_*$ (из свойства в) оператора d) и продифференцировать последнее равенство в точке 0.

Докажем равенство (1.5). Заметим, что оно имеет локальную природу, поэтому при доказательстве можно заменить X на некоторую координатную окрестность. Алгебра $\Omega(X)$ порождается в этом случае элементами f и df. Обе части равенства являются дифференцированиями, поэтому достаточно проверить их совпадение на образующих. Поскольку обе части имеют степень -1, на f они обращаются в 0. Теперь все следует из следующего вычисления:

$$[L_\xi, \iota_\eta]_+ df = L_\xi \iota_\eta df - \iota_\eta L_\xi df = L_\xi \partial_\eta f - \iota_\eta d L_\xi f = L_\eta L_\xi f - L_\xi L_\eta f = -L_{[\xi,\eta]} f = \iota_{[\xi,\eta]} df.$$

□

Приведем ещё несколько полезных формул. Из того, что L_ξ является дифференцированием относительно свертки, следует что

$$L_\xi(\omega(\xi_1,\dots,\xi_i)) = (L_\xi\omega)(\xi_1,\dots,\xi_i) + \sum_{j=1}^{i} \omega(\xi_1,\dots,[\xi,\xi_j],\dots,\xi_i). \tag{1.7}$$

Далее, применяя индуктивно равенство (1.3)

(1.8)

$$d\omega(\xi_0,\dots,\xi_i) = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+1} L_{\xi_i}\omega(\xi_0,\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\xi_i) - \sum_{j<k}(-1)^{j+k}\omega([\xi_j,\xi_k],\xi_0,\dots,\widehat{\xi_j},\dots,\widehat{\xi_k},\dots,x_i).$$

(знак $\widehat{}$, как обычно, означает, что символ опущен). Отметим, что в левой части предыдущего равенства стоит выражение, которое в точке x зависит лишь от значений векторных полей $\xi_0,\dots,\xi_i$ в этой точке.

1.4. **Действия групп Ли и векторные поля скоростей.** Эта тема относится к анализу на многообразиях с большой натяжкой. Однако здесь самое удачное место для этого напоминания.

Мы рассматриваем левые действия групп Ли. Алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G мы реализуем, как подалгебру в $\mathcal{V}ect(G)$, состоящую из правоинвариантных векторных полей. Эти векторные поля полны. Группа G действует на $\mathfrak{g}$ присоединенным представлением, обозначается через Ad. На уровне правоинвариантных векторных полей это есть не что иное как левый сдвиг на элемент группы. Имеется экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$. Опять же, если рассматривать элемент $\xi \in \mathfrak{g}$ как правоинвариантное поле, то $\exp(\xi) = \exp(\xi)e$.

Пусть теперь задано действие $G : X$. Мы сейчас определим естественный гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathcal{V}ect(X)$. Для $x \in X$ задано отображение $\varphi : G \to X, g \mapsto gx$. Для $\xi \in \mathfrak{g} \cong T_eG$ положим $\xi_* x = d_e\varphi(\xi)$. Касательные векторы $\xi_* x$ составляют векторное поле ξ_*, которое называется *векторным полем скоростей*, ассоциированным с ξ.

Упражнение 4. Покажите, что для $g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$ имеет место равенство $g_* \xi_* = (\mathrm{Ad}(g)\xi)_*$, иными словами, отображение $\xi \mapsto \xi_*$ является G-эквивариантным (здесь полезно представление об элементах из $\mathfrak{g}$ как о правоинвариантных векторных полях).

Теперь уже ничего не стоит показать, что $\xi \mapsto \xi_*$ является гомоморфизмом алгебр Ли. В самом деле, надо рассмотреть равенство $\exp(t\eta)_* \xi_* = (\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi)_*, \xi, \eta \in \mathfrak{g}$, и продифференцировать его в точке $t = 0$. Так мы получим, что $[\eta_*, \xi_*] = [\eta_*, m\xi_*]$. Линейность же очевидна.

Отметим ещё следующие свойства отображения $\xi \mapsto \xi_*$.

1) Векторное поле ξ_* полно и $\exp(t\xi) = \exp(t\xi_*)$ (как диффеоморфизмы многообразия X).

2) Для $x \in X$ мы обозначаем через G_x стабилизатор точки x в G, а через $\mathfrak{g}_x$ касательную алгебру этого стабилизатора.

Упражнение 5. Докажите эти два утверждения.

1.5. **Комплексные многообразия.** В этом пункте X — комплексное многообразие.

Рассмотрим X как действительное многообразие. Умножение на i в T_xX задается оператором $I \in \mathrm{GL}(T_xX, \mathbb{R})$ с $I^2 = -1$. Собственных векторов в T_xX он не имеет. Ситуация меняется при переходе от T_xX к $T_xX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Последнее рассматривается как комплексное векторное пространство, $\mathbb{C}$ действует умножениями на второй сомножитель. Имеется операция сопряжения на $T_xX \otimes \mathbb{C}$, оставляющая на месте $T_xX \cong T_xX \otimes \mathbb{R}$.

Мы обозначим через $T_{1,0\,x}X, T_{0,1\,x}X$ собственные подпространства оператора $I_{\mathbb{C}} \in \mathrm{GL}(T_xX \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$, соответствующие i и $-i$, соответственно (голоморфное и антиголоморфное касательное пространства). В явном виде, $T_{1,0\,x}X = \{\xi \otimes 1 - I\xi \otimes i, \xi \in T_xX\}, T_{0,1\,x}X = \{\xi \otimes 1 + I\xi \otimes i, \xi \in T_xX\}$. Имеем разложение в прямую сумму комплексных подпространств $T_xX \otimes \mathbb{C} = T_{1,0\,x}X \oplus T_{0,1\,x}X$. Композиция вложения $T_xX \hookrightarrow T_xX \otimes \mathbb{C}$ с соответствующими проекциями дает $\mathbb{R}$-линейные изоморфизмы $T_xX \cong T_{1,0\,x}X, T_xX \cong T_{0,1\,x}X$. Если положить $i\xi = I\xi$, то первый из изоморфизмов будет $\mathbb{C}$-линейным, а второй $\mathbb{C}$-антилинейным.

В соответствии с разложением $T_xX \otimes \mathbb{C} = T_{1,0\,x}X \oplus T_{0,1\,x}X$ имеем разложение $T_x^*X \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T_xX, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_xX \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{1,0\,x}X, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{0,1\,x}X, \mathbb{C})$. Первый Hom (из $T_{1,0}$) мы обозначаем через $T_x^{1,0}X$, второй — через $T_x^{0,1}X$. Например, для голоморфной функции f на X ковектор d_xf лежит в $T_x^{1,0}X$, а ковектор $d_x\overline{f}$ — в $T_x^{0,1}X$.

В соответствии с разложением $T_x^*X \otimes \mathbb{C} = T_x^{1,0}X \oplus T_x^{0,1}X$ имеем $\Omega^k(X) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{i+j=k} \Omega^{i,j}(X)$, где $\Omega^{i,j}(X) = \Gamma(X, T^{1,0}X^{\otimes i} \otimes T^{0,1}X^{\otimes j})$. Это задает биградуировку на алгебре $\Omega(X) \otimes \mathbb{C}$. Отметим, что если векторное поле ξ сохраняет комплексную структуру (т.е. локальные диффеоморфизмы $\exp(t\xi)$ таковы), то L_ξ сохраняет биградуировку на $\Omega(X) \otimes \mathbb{C}$.

Обсудим теперь, как связан с введенной биградуировкой внешний дифференциал. Выберем комплексные координаты $z^1, \ldots, z^n$ на X. Из того, что для любой гладкой функции f имеет место равенство

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}^i} d\overline{z}^i,$$

следует, что $d(\Omega^{ij}(X)) \subset \Omega^{i+1,j}(X) \oplus \Omega^{i,j+1}(X)$. Поэтому мы можем разложить d в сумму $\partial + \overline{\partial}$, где ∂ будет прибавлять к бистепени $(1, 0)$, а $\overline{\partial}$ — $(0, 1)$. Очевидным образом, видим, что $\partial, \overline{\partial}$ являются супердифференцированиями алгебры $\Omega(X) \otimes \mathbb{C}$ с $[\partial, \partial]_+ = [\partial, \overline{\partial}]_+ = [\overline{\partial}, \overline{\partial}]_+ = 0$.

Отметим, что для голоморфного отображения $\varphi : X \to Y$ гомоморфизм $\varphi^* : \Omega(Y) \otimes \mathbb{C} \to \Omega(X) \otimes \mathbb{C}$ сохраняет градуировку и коммутирует с $\partial, \overline{\partial}$.

2. Симплектические многообразия. Основные примеры и конструкции

В этом разделе мы определим одно из важнейших для нас понятий — симплектическое многообразие, приведем несколько примеров и конструкций с ними.

Основное определение этого раздела:

Определение 4. Пусть X — гладкое вещественное многообразие. 2-форма ω на X называется *симплектической*, если она замкнута (т.е. $d\omega = 0$) и невырождена в каждой точке. Многообразие X, снабженное симплектической формой ω, также называется *симплектическим*.

Тривиальное следствие из определения: $\dim X$ является четным числом (ибо на нечетномерном пространстве невырожденных кососимметрических форм не бывает).

Приведем теперь примеры симплектических многообразий.

2.1. **Симплектические векторные пространства.** Это, пожалуй, простейший из возможных примеров.

Пусть V — четно-мерное действительное векторное пространство. На V существует невырожденная кососимметрическая билинейная форма ω. Действительно, пусть $e_1, \dots, e_{2n}$ — базис пространства V. Тогда можем положить

$$\omega(\sum_{i=1}^{2n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{2n} y_i e_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_{n+i} - y_i x_{n+i}). \tag{2.1}$$

Как известно из линейной алгебры, все невырожденные кососимметрические билинейные формы сопряжены относительно действия группы $\mathrm{GL}(V)$. Стабилизатор такой формы — полная симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V)$.

Пусть теперь мы имеем невырожденную билинейную кососимметрическую форму ω на V. Поскольку для всех $x \in V$ пространство V_x канонически отождествляется с V, можем рассмотреть ω как 2-форму. Очевидно, что такая форма является симплектической. Говоря о симплектическом векторном пространстве, мы будем подразумевать именно такую пару (V, ω).

2.2. **Кокасательные расслоения.** Пусть X — гладкое вещественное многообразие. В этом пункте мы введем естественную симплектическую структуру на кокасательном расслоении T^*X, обобщающую введенную в предыдущем пункте.

Обозначим через π проекцию $T^*X \to X$. Точка из T^*X представляет из себя пару (x, β) с $x \in X, \beta \in T^*_x X$. Пусть U — координатная окрестность в X, $q^1, \dots, q^n$ — координаты. Введем на $\pi^{-1}(U)$ функции $p^1, \dots, p^n$ следующим образом: $(x, \beta) \mapsto p^1(x, \beta) d_x q^1 + \dots p^n(x, \beta) d_x q^n$. Функции $p^i, q^i, i = \overline{1, n}$ составляют систему координат на $\pi^{-1}(U)$.

Пусть форма $\alpha \in \Omega^1(T^*X)$ задается так: $\langle \alpha, \xi \rangle (x, \beta) = \langle \beta, d_{(x,\beta)} \xi \rangle$ для $\xi \in \mathcal{V}ect(T^*X)$. Во введенных выше координатах $\alpha = \sum_{i=1}^n p^i dq^i$.

Положим $\omega = -d\alpha$. Для проверки того, что форма ω является симплектической, достаточно показать, что она невырождена. Но это следует из того, что в координатах $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$.

Предыдущий пример получается из этого, если рассмотреть в качестве X пространство $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Впоследствии нам понадобится знать какие значения принимает ω на определенных векторных полях из $\mathcal{V}ect(T^*X)$. Ниже мы определим нужные для этого классы функций и векторных полей на T^*X.

Сперва функции:

1) Пусть $f \in C^\infty(X)$. Тогда $\pi^*(f)$ есть гладкая функция на T^*X. Функция из $C^\infty(T^*X)$ имеет вид $\pi^*(f)$ тогда и только тогда, когда она постоянна на слоях.

2) Пусть $\xi \in \mathcal{V}ect(X)$. Мы можем рассмотреть ξ как функцию из $C^\infty(T^*X)$ линейную на слоях расслоения, положив $\xi(x,\beta) = \langle \xi_x, \beta\rangle$. Обратно, любая функция из $C^\infty(T^*X)$, которая линейна на слоях, имеет такой вид.

Теперь векторные поля:

3) Пусть $\gamma \in \Omega^1(X)$. Для $(x,\beta) \in T^*X$ касательное пространство $T_(x,\beta)\pi^{-1}(T^*X)$ естественным образом отождествляется с T^*_xX. Это позволяет нам рассматривать γ_x как элемент из $T_{(x,\beta)}\pi^{-1}(x)$. Получаем векторное поле на T^*X, которое мы обозначим через $\widetilde{\gamma}$. Отметим, что $d\pi(\widetilde{\gamma}) = 0$, откуда $\alpha(\widetilde{\gamma}) = 0$. Векторные поля на T^*X, обладающие указанным свойством, называются *вертикальными.*

4) Пусть $\xi \in \mathcal{V}ect(X)$. Имеем л.о.г.д $\exp(t\xi)$. Для диффеоморфизма g многообразия X (глобального или локального) рассмотрим его подъем $\widetilde{g}$ на T^*X, т.е., по определению, $\widetilde{g}(x,\beta) = (gx, g_*\beta)$. Заметим, что $\widetilde{\exp(t\xi)}$ снова является л.о.г.д. Обозначим через $\widetilde{\xi}$ векторное поле, соответствующее л.о.г.д. $\widetilde{\exp(t\xi)}$. Такие векторные поля на T^*X называются *структурными.* Отметим, что $d\pi(\widetilde{\xi}) = \xi$, откуда $\alpha(\widetilde{\xi}) = \xi$.

Выпишем теперь коммутационные соотношения между векторными полями типов 3),4). Они совершенно естественны:

Упражнение 6. Для $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega^1(X), \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}ect(X)$ имеют место равенства

$$[\widetilde{\gamma_1}, \widetilde{\gamma_2}] = 0, \tag{2.2}$$

$$[\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\gamma_1}] = \widetilde{L_{\xi_1}\gamma_1}, \tag{2.3}$$

$$[\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2}] = \widetilde{[\xi_1, \xi_2]}. \tag{2.4}$$

Найдем теперь значения формы ω на указанных векторных полях

Лемма 5. *Для $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega^1(X), \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}ect(X)$ имеем*

$$\omega(\widetilde{\gamma_1}, \widetilde{\gamma_2}) = 0, \tag{2.5}$$

$$\omega(\widetilde{\gamma_1}, \widetilde{\xi_1}) = \pi^*(\langle \gamma_1, \xi_1\rangle), \tag{2.6}$$

$$\omega(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2}) = [\xi_1, \xi_2]. \tag{2.7}$$

Доказательство. Мы докажем равенство (2.6), остальное остается в качестве упражнения. По определению и формуле (1.8) имеем

$$\omega(\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\gamma_1}) = L_{\widetilde{\xi_1}}(\alpha(\widetilde{\gamma_1})) - L_{\widetilde{\gamma_1}}(\alpha(\widetilde{\xi_1})) - \alpha([\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\gamma_1}]) = [\widetilde{\gamma_1}, L_{\widetilde{\xi_1}}\widetilde{\gamma_1} \text{ вертикальны}] = \partial_{\widetilde{\gamma_1}}\xi_1 =$$
$$[\text{ дифференцирование линейной функции}] = \pi^*(\langle \gamma_1, \xi_1\rangle).$$

$\square$

2.3. **Коприсоединенные орбиты групп Ли.** Пусть G — группа Ли, а $\mathfrak{g}$ — её касательная алгебра.

Имеем присоединенные представления $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. В соответствии с этим имеем *коприсоединенные представления* $\mathrm{Ad}^*, \mathrm{ad}^*$ группы G и алгебры $\mathfrak{g}$, соответственно, в двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$. А именно, для $g \in G, \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \alpha \in \mathfrak{g}^*$ определим $\mathrm{Ad}^*(g)\alpha, \mathrm{ad}^*(\xi)\alpha$ по формулам $\langle \mathrm{Ad}^*(g)\alpha, \eta\rangle = \langle \alpha, \mathrm{Ad}(g)^{-1}\eta\rangle$, $\langle \mathrm{ad}^*(\xi)\alpha, \eta\rangle = -\langle \alpha, [\xi, \eta]\rangle$.

Наша цель состоит в том, чтобы ввести на *коприсоединенных орбитах* $\mathcal{O} = \mathrm{Ad}^*(G)\alpha, \alpha \in \mathfrak{g}^*$, естественную G-инвариантную симплектическую структуру. Отметим прежде всего, что $\mathcal{O} \cong G/G_\alpha$ является гладким многообразием, и $T_\alpha\mathcal{O} = \mathrm{ad}^*(\mathfrak{g})\alpha$. Непосредственно из определений следует, что $\xi_*\alpha = \mathrm{ad}^*(\xi)\alpha, \xi \in \mathfrak{g}, \alpha \in \mathcal{O}$. Таким образом, векторы скоростей порождают касательное пространство к $\mathcal{O}$ в произвольной точке.

Определим 2-форму ω на $\mathcal{O}$ следующим равенством

$$\omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) = \langle \alpha, [\xi, \eta]\rangle. \tag{2.8}$$

Заметим, прежде всего что форма ω корректно определена и невырождено. Действительно, $\xi_*\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$.

Покажем теперь, что форма ω является G-инвариантной. Это получается путем следующего вычисления

$(g_*\omega)_\alpha(\xi_*, \eta_*) =$ [из определения действия на формах] $= \omega_{\mathrm{Ad}^*(g)^{-1}\alpha}(g_*^{-1}\xi_*, g^{-1}\eta_*) =$
[из эквивариантности соответствия $\xi \mapsto \xi_*$] $= \omega_{\mathrm{Ad}^*(g)^{-1}\alpha}((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\xi)_*, (\mathrm{Ad}(g)^{-1}\eta)_*) =$
[из определения формы ω] $= \langle \mathrm{Ad}^*(g)^{-1}\alpha, [\mathrm{Ad}(g)^{-1}\xi, \mathrm{Ad}(g)^{-1}\eta] \rangle = \langle \mathrm{Ad}^*(g)^{-1}\alpha, \mathrm{Ad}(g)^{-1}[\xi, \eta] \rangle$
$= \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle = \omega_\alpha(\xi_*, \eta_*)$.

Наконец, перейдем к доказательству замкнутости формы ω. Для этого нам потребуется следующая лемма

Лемма 6. *Пусть ω — произвольная 2-форма на гладком многообразии X и ξ, η, ζ векторные поля на X, для которых $L_\xi\omega = L_\eta\omega = L_\zeta\omega = 0$. Тогда*

$$L_\xi(\omega(\eta, \zeta)) + L_\eta(\omega(\zeta, \xi)) + L_\zeta(\omega(\xi, \eta)) = 2(\omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) + \omega([\zeta, \xi], \eta)). \tag{2.9}$$

Доказательство. Для доказательства трижды применить равенство (1.7). □

Поскольку поля скоростей порождают $T_\alpha\mathcal{O}$ для любой точки $\alpha \in \mathcal{O}$, достаточно доказать, что $d\omega(\xi_*, \eta_*, \zeta_*) = 0$ для $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{V}ect(X)$. Из G-инвариантности формы ω следует, что $L_{\xi_*}\omega = L_{\eta_*}\omega = L_{\zeta_*}\omega = 0$. Применяя (1.8) и лемму 6 получаем, что остается доказать равенство

$$\omega([\xi_*, \eta_*], \zeta_*) + \omega([\eta_*, \zeta_*], \xi_*) + \omega([\zeta_*, \xi_*], \eta_*) = 0 \tag{2.10}$$

Из определения формы ω и трех равенств вида $[\xi_*, \eta_*] = [\xi, \eta]_*$ видим, что (2.10) следует из тождества Якоби.

Полученная симплектическая форма ω на $\mathcal{O}$ называется *формой Костанта-Кириллова.*

Теперь задачи.

Задача 7. Постройте пример не коприсоединенной орбиты, обладающей инвариантной симплектической формой.

Задача 8. Эта задача устанавливает связь между симплектическими векторными пространствами V и коприсоединенными $\mathrm{Sp}(V)$-орбитами.

Пусть V — симплектическое векторное пространство с симплектической формой ω. Постройте коприсоединенную $\mathrm{Sp}(V)$-орбиту $\mathcal{O}$ с формой Костанта-Кириллова ω_1 и $\mathrm{Sp}(V)$-эквивариантное двулистное накрытие $\varphi : V \setminus \{0\} \to \mathcal{O}$, для которого $\varphi^*\omega_1 = \omega$.

2.4. **Конструкции с симплектическими многообразиями.** Выбор конструкций, в общем то, небогат.

1) Накрытия. Пусть X — симплектическое многообразие с формой ω, $\widetilde{X}$ — некоторое многообразие, и $\varphi : \widetilde{X} \to X$ — этальное отображение (т.е. такое, что $d_x\varphi$ является изоморфизмом для всех $x \in \widetilde{X}$). Тогда $\varphi^*\omega$ является симплектической формой.

2) Прямые произведения. Пусть X_1, X_2 — симплектические многообразия с формами ω_1, ω_2 соответственно. Обозначим через π_i проекции $X_1 \times X_2 \to X_i, i = 1, 2$. Тогда форма $\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$ является симплектической.

3) Подмногообразия. Пусть X — симплектическое многообразие с формой ω, Y — гладкое подмногообразие в X и ι — вложение Y в X. Форма $\iota^*\omega \in \Omega^2(Y)$, очевидно, замкнута. Если она ещё и невырождена в любой точке, то является симплектической. Y вместе с $\iota^*\omega$ называется *симплектическим подмногообразием* в X.

Помимо симплектических подмногообразий, большой интерес представляют подмногообразия в X на которых форма ω "наиболее вырождена", т.е. имеет минимальный возможный ранг для данной размерности многообразия Y. Различают два типа таких подмногообразий:

а) Если $\iota^*\omega = 0$, то подмногообразие Y называется *изотропным.* Эквивалентно, подмногообразие Y изотропно, если $T_yY \subset T_yY^\perp$ для всех $y \in Y$ (через $\perp$ обозначено ортогональное (иногда говорят, косоортогональное) дополнение относительно формы ω_y). В этом случае $\dim Y \leqslant \dim X/2$.

б) Если для всех $y \in Y$ имеет место включение $T_yY^\perp \subset T_yY$, то подмногообразие Y называется *коизотропным.* В этом случае $\dim Y \geqslant \dim X/2$.

Подмногообразие $Y \subset X$, которое изотропно и коизотропно одновременно (эквивалентно, (ко)изотропно и имеет размерность $\dim X/2$) называется *лагранжевым.*

3. Комментарии по поводу литературы

Литература по симплектической (и, более общо, пуассоновой, которую мы рассматривать толком не будем) геометрии весьма обширна. Мне, например, нравится учебник [1]. Упомянем также обзор [2]. Очень краткое, но четкое и понятное, введение в вопрос содержится в статье [3], гл.2, §1.

Литература

[1] A. Cannas Da Silva. Lectures on symplectic geometry// LNM 1764, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[2] В.И. Арнольд, А.Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия// Итоги науки и техники. Современные пробл. математики. Фунд. направления. Т.4. М: ВИНИТИ, 1985, с. 179-285.

[3] Э.Б. Винберг. Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия// УМН. т.56(2001), вып. 1. с.3-62.