ЛЕКЦИЯ 10

Содержание

1. Многогранник Бриона

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, V — G-модуль, $T \subset B$ — максимальный тор и борелевская подгруппа в G, Δ, Δ_+ — системы всех и положительных корней, $C \subset \mathfrak{t}(\mathbb{R})$ — соответствующая камера Вейля, K — компактная форма в G, для которой $T \cap K$ — максимальный тор в K. Фиксируем K-инвариантное эрмитово скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в V. Проективное пространство $\mathbb{P}(V)$ становится гамильтоновым K-многообразием с отображением моментов

$$\langle \mu([v]), \xi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{\langle \xi v, v \rangle}{\langle v, v \rangle}. \tag{1.1}$$

Для $x \in \mathbb{P}(V)$ положим $\psi(x) = K\mu(x) \cap \frac{1}{i}C$.

Напомним, что на положительной камере Вейля C для $\mathfrak{g}$ имеется инволюция $\lambda \mapsto \lambda^*$, которая на доминантных весах из $\mathfrak{X}(T)$ действует так: λ^* является старшим весом модуля $V(\lambda)^*$.

Рассмотрим замкнутое неприводимое подмногообразие $X \subset \mathbb{P}(V)$. Этому многообразию сопоставим подмножество точек в $\mathfrak{t}(\mathbb{Q})^*$, которое мы обозначим через $\mathrm{Br}(X)$. Делается это так: для натурального числа n обозначим через $W_n(X)$ множество старших весов G-модуля $\mathbb{C}_{hom}[X]_n$. Теперь полагаем $\mathrm{Br}(X) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{\lambda^*/n | \lambda \in W_n(X)\}$.

Основная цель этой лекции состоит в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 1. (1) $2\pi i\psi(X) \cap \mathfrak{t}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Br}(X)$.

(2) *Подмножество* $2\pi i\psi(X) \cap \mathfrak{t}(\mathbb{Q})$ *плотно в* $2\pi i\psi(X)$.

(3) *Подмножество* $\mathrm{Br}(X) \subset \mathfrak{t}(\mathbb{Q})$ *является многогранником.*

Утверждение пункта 3 означает, что найдутся элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, для которых

$$\mathrm{Br}(X) = \{\sum_{i=1}^n t_i\alpha_i | t_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}.$$

Вместе с утверждениями пунктов 1 и 2, это означает, что $\psi(X)$ является выпуклым многогранником в $i\mathfrak{t}(\mathbb{R}) = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$, с вершинами, содержащимися в множестве $\frac{\lambda_i}{2\pi i}$.

Перед тем, как приступать к доказательству теоремы отметим, что множество $\mathrm{Br}(X)$ выпукло. Действительно, для старших весов $f \in \mathbb{C}_h[X]_n, g \in \mathbb{C}_h[X]_m$ и любых k, l функция $f^k g^l$ отлична от нуля (в силу неприводимости многообразия X) и является старшим весом в $\mathbb{C}_h[X]_{kn+ml}$.

1.1. **Напоминание полученных ранее результатов.** Для начала напомним некоторые результаты из лекций 7-9 и выведем из них легкие следствия.

Пусть $X \subset \mathbb{CP}^n, Y \subset \mathbb{CP}^m$ —вложенные проективные многоообразия. Мы обозначим через φ_d — d-кратное вложение, а через $X \times Y$ — образ абстрактного многообразия $X \times Y$ при вложении Сегре. В лекции 7 было показано, что $\mathbb{C}_h[X \times Y]_n = \mathbb{C}_h[X]_n \otimes \mathbb{C}_h[X]_n, \mathbb{C}_h[\varphi_d(X)]_n = \mathbb{C}_h[X]_{nd}$.

Для старшего веса $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ мы определили G-подмногообразие $O_\lambda \subset \mathbb{P}(V(\lambda))$ — орбиту проективизации старшего вектора. В лекции 8 мы показали, что $\mathbb{C}_h[O_\lambda]_n = V(n\lambda^*)$. Кроме того, мы видели, что K действует транзитивно на O_λ, а стабилизатор прямой, содержащей старший вектор, есть подгруппа Леви L в K, централизующая $i\lambda$.

Далее, в лекции 9 мы показали, что гамильтонова K-структура на O_λ, получающаяся ограничением структуры с $\mathbb{P}(V(\lambda))$, есть структура Костанта-Кириллова на K/L, соответствующая элементу $\frac{\lambda}{2\pi i}$ (по сути, это то, что доказано в предложении 15). Отсюда можно такое следствие:

Следствие 2. *Пусть группа G действует линейно на векторных пространствах V_1, V_2, на которых заданы K-инвариантные эрмитовы скалярные произведения, индуцирующие гамильтоновы структуры на $\mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(V_2)$. Пусть $X \subset \mathbb{P}(V_1), Y \subset \mathbb{P}(V_2)$. Тогда ограничение гамильтоновой структуры с $\mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$ на $X \times Y$ совпадает с произведением гамильтоновых структур. Ограничение гамильтоновой структуры с $\mathbb{P}(S^d(V_1))$ на $\varphi_d(X)$ является "d-кратным увеличением" гамильтоновой структуры на X (т.е. форма и отображение моментов увеличиваются в d раз).*

Доказательство. Предложения 13,14 предыдущей лекции позволяют ограничиться рассморением отображений моментов. Это достаточно сделать для $X = \mathbb{P}(V_1), Y = \mathbb{P}(V_2)$. Рассмотрим случай произведения. Достаточно осуществить проверку для $G = \mathrm{GL}(V_1) \times \mathrm{GL}(V_2)$, где первый множитель действует только на $\mathbb{P}(V_1)$, второй только на $\mathbb{P}(V_2)$, (в общем случае отображения моментов, которые мы хотим сравнить, получатся ограничением с $\mathrm{U}(V_1) \times \mathrm{U}(V_2)$ на некоторую подгруппу). Но это изоморфизм гамильтоновых многообразий $O_{\varepsilon_1} \times O_{\varepsilon_1'} = O_{\varepsilon_1 + \varepsilon_1'}$, где $\varepsilon_1(diag(x_1, \ldots, x_n)) = x_1$, и ε_1' определяется аналогично для второй группы. Для d-кратного вложения достаточно рассмотреть $X = \mathbb{P}(V_1), G = \mathrm{GL}(V_1)$. Тогда $\varphi_d(X) = O_{d\varepsilon_1} \subset \mathbb{P}(V(d\varepsilon_1)) = \mathbb{P}(S^d V_1)$. □

Наконец, напомним, что $(\mu^{-1}(0) \cap X)/K \cong X^{ss}//G$, в частности,

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны*

(1) $0 \in \mu(X)$.
(2) $\mathbb{C}_h[X]^G \neq \mathbb{C}$.

1.2. **Приложение к исследованию слоев.** Пусть $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$ — доминантный вес. Положим $X_\lambda = X \times O_\lambda$ и пусть μ_λ — соответствующее отображение моментов (точнее, ограничение отображения моментов для $\mathbb{P}(V) \times O_\lambda$ на $X \times O_\lambda$). Положим $\alpha = \frac{\lambda}{2\pi i}$.

Предложение 4. *Имеет место K-эквивариантный гомеоморфизм топологических пространств $\mu_\lambda^{-1}(0) = K *_{K_\alpha} \mu^{-1}(-\alpha)$.*

Доказательство. Действительно, $\mu_\lambda(x, k[v_\lambda]) = 0 \Leftrightarrow \mu(x) + k\alpha \Leftrightarrow k^{-1}\mu(x) = -\alpha$. Рассмотрим отображение $K *_{K_\alpha} \mu^{-1}(-\alpha) \to X_\lambda$, $[k, x] \mapsto (kx, k[v_\lambda])$. Это отображение и задает требуемый гомеоморфизм (напомним, что $K *_{K_\alpha} \mu^{-1}(\alpha)$ — компактное топологическое пространство). □

В качестве следствия получаем

Следствие 5. *Пусть $\xi \in \mathfrak{k}$ — элемент, все собственные значения которого в любом вещественном представлении группы K лежат в $\frac{1}{2\pi i}\mathbb{Q}$. Тогда, если многообразие X неприводимо, то $\mu^{-1}(\xi)$ — связное топологическое пространство.*

Доказательство. Заменив ξ на сопряженный элемент, можем считать, что ξ лежит в отрицательной камере Вейля. Перейдя от X к d-кратному вложению, мы увеличим отображение моментов в d раз (проверьте). Поэтому можно считать, что $\xi = -\frac{1}{2\pi i}\lambda$, где λ — доминантный вес из $\mathfrak{X}(T)$ (здесь мы, как обычно, отождествили $\mathfrak{k}$ с $\mathfrak{k}^*$). Из предложения 4 и следствия 8 предыдущей лекции следует, что $K *_{K_\xi} \mu^{-1}(\xi)$ — связное топологическое пространство. Теперь остается воспользоваться односвязностью флагового многообразия K/K_ξ и, скажем, точной гомотопической последовательностью расслоения. $\square$

В качестве второго следствия мы получаем

Доказательство пункта 1 теоремы 1. Отметим, что $\psi(\varphi_d(X)) = d\psi(X), \mathrm{Br}(\varphi_d(X)) = d\,\mathrm{Br}(X)$. Поэтому, заменив если надо X на d-кратное вложение для подходящего d, достаточно доказать, что доминантный вес λ содержится в $2\pi i\psi(X)$ тогда и только тогда, когда λ^* — старший вес G-модуля $\mathbb{C}_h[X]_n$ для некоторого n. Согласно предложению 4 и следствию 3,

$$\lambda \in 2\pi i\psi(X) \Leftrightarrow -\frac{\lambda^*}{2\pi i} \in \mu(X) \Leftrightarrow 0 \in \mu_{\lambda^*}(X \times O_{\lambda^*}) \Leftrightarrow \mathbb{C}_h[X \times O_{\lambda^*}]^G \neq \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Последнее неравенство эквивалентно тому, что найдется $n > 0$ с $\mathbb{C}_h[X \times O_{\lambda^*}]_n^G \neq 0$. Но

$$\mathbb{C}_h[X \times O_{\lambda^*}]_n \cong \mathbb{C}_h[X]_n \otimes \mathbb{C}_h[O_{\lambda^*}]_n \cong \mathbb{C}_h[X]_n \otimes V(n\lambda). \tag{1.3}$$

Для старшего веса μ имеем $(V(\mu) \otimes V(\lambda))^G \cong \mathrm{Hom}(V(\mu), V(\lambda^*))^G \neq 0 \Leftrightarrow \mu = \lambda^*$. Таким образом, $\lambda \in 2\pi i\psi(X)$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \mathbb{N}$ для которого $n\lambda^*$ является старшим весом в $\mathbb{C}_h[X]_n$. Но тем же условием характеризуются и точки из $\mathrm{Br}(X)$ (непосредственно из определения последнего). $\square$

1.3. **Рациональные точки в $2\pi i\psi(X)$.** Здесь мы докажем часть 2 теоремы 1. Для этого нам понадобится следующие леммы

Лемма 6. *Пусть $G = G_1 \times G_2$, где G_2 — алгебраический тор, действующий константами на V. Пусть μ_1 — отображение моментов для действия $G_1 : \mathbb{P}(V)$. Тогда $\mu(x) = (\mu_1(x), \frac{r}{2\pi i})$, где $r \in \mathfrak{g}_2(\mathbb{Q})$.*

Доказательство. Непосредственно из равенства 1.1 (r будет тем весом, которым действует G_2 на V). $\square$

Лемма 7. *Пусть H — связная редуктивная подгруппа в G, для которой $H \cap K$ является компактной формой в K. Тогда $(\mathbb{P}(V))^H = \coprod_\alpha \mathbb{P}(V_\chi^{(H)})$, где $V_\chi^{(H)}$ обозначает весовое подпространство веса χ для H. Группа $N_G(H)^\circ$ оставляет $\mathbb{P}(V_\chi^{(H)})$ на месте для любого χ. Отображение моментов для действия $K \cap N_G(H)^\circ$ (компактной формы в $N_G(H)^\circ$) на $\mathbb{P}(V_\chi^{(H)})$ совпадает с $\mu|_{\mathbb{P}(V_\chi^{(H)})}$.*

Доказательство. Все утверждения очевидны кроме, возможно, последнего. Для его доказательства надо заметить, что $\mu(\mathbb{P}(V)^H) \subset \mathfrak{k}^{H\cap K} \subset \mathrm{Lie}(N_G(H)^\circ \cap K)$ (ср. с доказательством теоремы 12 из предыдущей лекции). $\square$

Доказательство пункта 2 теоремы 1. Поскольку ψ — непрерывное отображение (как композиция непрерывных), достаточно доказать, что для некоторого открытого плотного подмножества $X^0 \subset X$ подмножество $2\pi i\psi(X^0) \cap \mathfrak{t}(\mathbb{Q})$ плотно в $2\pi i\psi(X^0)$.

Рассмотрим сначала случай, когда K действует локально эффективно на X. Подмножество $X^0 = \{x \in X |\dim \mathfrak{k}_* x = \dim \mathfrak{k}\}$ открыто и плотно в X. В точках из X^0 отображение моментов является субмерсией (ибо $\mathrm{im}\, d_x\mu = (\mathfrak{k}_x)^\perp$). Поскольку любая орбита элемента в $\mathfrak{k}$ в любой малой K-инвариантной окрестности содержит элемент из $\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{t}(\mathbb{Q})$, получаем требуемое.

Пусть теперь стабилизатор общего положения для действия $K : X$ (или, более аккуратно, для $K : X^{reg}$) недискретен и его связная компонента есть H_K. Пусть H — соответствующая редуктивная подгруппа в G. Рассмотрим неприводимую компоненту $X_0 \subset X^H$, на которой найдется точка x с $(K_x)^\circ = H_K$. Это неприводимое подмногообразие в $\mathbb{P}(V_\chi^{(H)})$ (для некоторого характера χ) группы H, на котором действует группа $G_0 = N_G(H)^\circ$. K-разнесение объединения таких компонент совпадает с X, поэтому достаточно доказать, что $2\pi i\psi(X_0) \cap \mathfrak{t}(\mathbb{Q})$ плотно в $2\pi i\psi(X_0)$.

Положим $K_0 = N_G(H)^\circ \cap K$. Это компактная форма в $N_G(H)^\circ$. Обозначим через μ_0 — отображение моментов для действия $K_0 : X_0$ и через ψ_0 — соответствующее отображение в камеру Вейля для K_0. Действие $K_0 : X_0$, вообще говоря, не является локально эффективным. Отметим, во-первых, что имеется подгруппа $H_0 \subset H$, тривиально действующая на $V_\chi^{(H)}$. Отображение μ_0 принимает значения в $\mathfrak{k}_0 \cap (\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{k})^\perp$ и совпадает с отображением моментов для действия $G_0/H_0 : X_0$. Но и действие $K_0/(K_0 \cap H_0) : X_0$ не является эффективным. Однако, перейдя к накрытию группы G_0/H_0, можем считать, что $G_0/H_0 = G_{01} \times G_{02}$, где G_{02} — тор, действующий на $V_\chi^{(H)}$ умножениями на константы, а $G_{01} \cap K$ действует уже локально эффективно на X_0. Лемма 6 и доказанное выше дает, что объединение K_0-орбит элементов из $\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{t}_0(\mathbb{Q})$ плотно в $\mathfrak{k}_0$ (здесь $\mathfrak{t}_0$ — картановская подалгебра в $\mathfrak{g}_0$). Можем считать, что $\mathfrak{t}_0 \subset \mathfrak{t}$. Тогда $\mathfrak{t}_0(\mathbb{Q}) \subset \mathfrak{t}(\mathbb{Q})$. Применяя лемму 7 (а именно, последнее утверждение), видим, что $\psi(X_0)$ совпадает с пересечением $K\psi_0(X_0)$ с C. Это дает требуемое. $\square$

1.4. **Конечная порожденность** $\mathrm{Br}(X)$.

Определение 8. G-алгеброй называется алгебра (коммутативная, ассоциативная и с единицей), на которой группа G действует автоморфизмами. G-алгебра называется *рациональной*, если любой элемент содержится в конечно-мерном регулярном G-подмодуле.

Положим $U = B_u$. Это максимальная унипотентная подгруппа в G. Нам потребуется следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть A — рациональная G-алгебра. Тогда A^U — рациональная T-алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A конечно-порождена.*
(2) *Алгебра A^U конечно-порождена.*

Доказательство этой теоремы будет приведено в следующем разделе.

Доказательство пункта 3 теоремы 1. Согласно теореме 9 алгебра $\mathbb{C}_h[X]^U$ конечно-порождена. Более того, мы можем считать, что образующие $f_1, \ldots, f_k$ однородны и T-полуинвариантны. Пусть $n_i = \deg f_i$. Мы видим, что f_i — старший вес в G-модуле $\mathbb{C}_h[X]_{n_i}$. Пусть λ_i — вес функции f_i. Пусть f — некоторый старший вектор в $\mathbb{C}_h[X]_n$ веса λ. Тогда f есть линейная комбинация мономов от $f_1, \ldots, f_k$ степени n и веса λ. Таким образом, $\lambda = \sum_{i=1}^k d_i\lambda_i$ с $\sum_{i=1}^k d_i n_i = n$. Получаем, что

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i n_i}{n}\lambda,$$

т.е. $\mathrm{Br}(X)$ лежит в многоугольнике натянутом на $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$. Обратное включение следует из выпуклости $\mathrm{Br}(X)$, которая обсуждалась выше. $\square$

2. U-инварианты

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 9. Утверждение про рациональность T-алгебры A^U следует из того, что A есть прямая сумма неприводимых G-модулей, и

U-инвариантом в каждом из этих модулей является старший вектор. Остается доказать эквивалентность конечно-порожденностей. Это доказательство проводится в три шага:

(1) Сначала мы докажем, что из конечно-порожденности алгебры A^U следует конечная порожденность алгебры A.
(2) Затем мы рассмотрим один частный случай: а именно действие группы G на себе правыми сдвигами и покажем, что алгебра $\mathbb{C}[G]^U$ конечно-порождена.
(3) Наконец, мы сведем общий случай к указанному выше, доказав (в более общей ситуации), что $A^U \cong (\mathbb{C}[G]^U \otimes A)^G$.

2.1. **Конечная порожденность A^U влечет конечную порожденность A.** Это довольно просто.

Выберем конечную систему образующих в A^U. Можем считать, что она состоит из старших векторов $f_1, \ldots, f_k$. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — соответствующие неприводимые модули. Имеем естественный гомоморфизм $S(V_1 \oplus \ldots \oplus V_k) \to A$. Мы хотим показать, что это эпиморфизм. Действительно, пусть $B \subset A$ — образ этого отображения. Тогда $A^U \subset B$. С другой стороны, B является G-инвариантная подалгебра в A. Поскольку $A^U \subset B$, то B содержит любой старший вектор из A, а стало быть, и любой неприводимый подмодуль. Т.е. $B = A$. Что и требовалось.

2.2. **Конечная порожденность алгебры $\mathbb{C}[G]^U$.** Рассмотрим G-модульную структуру на $\mathbb{C}[G]^U$. Обозначим через $\mathfrak{X}(T)_+$ множество доминантных весов для группы G.

Лемма 10. $\mathbb{C}[G]^U \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{X}(T)_+} V(\lambda)$.

Доказательство. Сначала укажем вложение $V(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}[G]^U$. Для $v \in V(\lambda), \alpha \in V(\lambda^*)$ определен матричный коэффициент $f_{v,\alpha}(g) = \langle \alpha, gv \rangle = \langle g\alpha, v \rangle$. Пространство всех таких матричных коэффициентов изоморфно $V(\lambda^*) \otimes V(\lambda)$ как $G \times G$-модуль. Если $\alpha \in V(\lambda^*)^U$ — старший вес, то $f_{v,\alpha}(g) \in \mathbb{C}[G]^U$. Пространство всех $f_{v,\alpha}, v \in V(\lambda)$ есть G-модуль, изоморфный $V(\lambda)$.

Теперь покажем, что кратность модуля $V(\lambda)$ в $\mathbb{C}[G]^U$ не превосходит 1. Пусть есть два старших вектора $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]^U$ одного веса λ. Положим $f = f_1/f_2 \in \mathrm{Quot}(\mathbb{C}[G]^U)$. Поскольку $\mathbb{C}[G]^U = \mathbb{C}[G/U]$, то f — рациональная функция на G/U. Эта функция B-инвариантна. Но B имеет открытую орбиту на G/U (для противоположной борелевской подгруппы B^- видим, что $B^-(eU)$ плотно в G/U). Функция f постоянна на этой орбите, и, стало быть, постоянна. Иными словами f_1 и f_2 пропорциональны. $\square$

Рассмотрим теперь алгебру U-инвариантов $\mathbb{C}[G/U]^U$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathbb{C}[G/U]^U \cong \mathbb{C}[\mathfrak{X}_+(T)]$ (моноидная алгебра). Стало быть, достаточно показать, что моноид $\mathfrak{X}_+(T)$ конечно порожден. Рассмотрим односвязную алгебраическую группу $\widetilde{G}$ (т.е. прямое произведение односвязной полупростой группы и тора), накрывающую G (см. предложение 3 лекции 8). Моноид $\mathfrak{X}_+(T)$ есть моноид конечного индекса в аналогичном моноиде для $\widetilde{G}$. Последний же является прямой суммой моноидов $\mathbb{Z}^{\dim \mathbb{Z}(G)}$ и $\mathbb{Z}_+^{\dim(G,G)}$, в частности, конечно порожден. Значит, и $\mathfrak{X}_+(T)$ конечно-порожденный моноид. Предыдущий пункт показывает, что алгебра $\mathbb{C}[G/U] = \mathbb{C}[G]^U$ конечно порождена.

2.3. **Завершение доказательства.** Определение рациональной G-алгебры, данное выше, прямо переносится на случай необязательно редуктивной группы G.

Предложение 11. *Пусть G — алгебраическая группа, H — алгебраическая подгруппа в G, A — рациональная G-алгебра. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A \otimes \mathbb{C}[G/H] \to A$, $f \otimes g \mapsto g(eH)f$. Гомоморфизм φ осуществляет изоморфизм $(A \otimes \mathbb{C}[G/H])^G \cong A^H$.*

Доказательство. Доказательство в три шага. *Шаг 1. Корректность* Пусть $f = f_1 \otimes g_1 + \ldots + f_k \otimes g_k \in (A \otimes \mathbb{C}[G/H])^G$. Тогда

$$h\varphi(f) = h(\sum_{i=1}^{k} g_i(eH)f_i) = \sum_{i=1}^{k} g_i(eH)h.f_i = \sum_{i=1} h.g_i(eH)h.f_i =$$

$$= \varphi(\sum_{i=1}^{k} h.g_i \otimes h.f_i) = \varphi(h.f) = \varphi(f), h \in H$$

Шаг 2. Инъективность. Пусть $\varphi(f) = 0$ для $f \in (A \otimes \mathbb{C}[G/H])^G$. Запишем $f = \sum_{i=1}^{k} f_i \otimes g_i$ с минимально возможным k. В этом случае все $f_i \in A$ линейно независимы.

$$\sum_{i=1}^{n} g.g_i \otimes g.f_i = \sum_{i=1} g.g_i \otimes g.f_i, \varphi(g.f) = \sum_{i=1}^{k} g_i(g^{-1}H)g.f_i.$$

Если $\varphi(f) = 0$, то $\varphi(g.f) = 0$ для всех g. Но элементы $g.f_1, \ldots, g.f_n$ линейно независимы. Поэтому $g_i(gH) = 0$, т.е. $g_i = 0$ и $f = 0$.

Шаг 3. Сюръективность. Здесь единственное место, где мы пользуемся G-рациональностью A. Пусть $f \in A^H$. Обозначим через $f_1, \ldots, f_k$ — базис в G-модуле $\langle Gf \rangle$. Последний есть конечно-мерный рациональный G-модуль. Поэтому $g.f = \sum_{i=1}^{k} g_i(g)f_i$ для некоторых $g_i \subset \mathbb{C}[G]$. Для $g \in G, h \in H$ имеем

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(g)f_i = g.f = g.h.f = (gh).f = \sum_{i=1}^{k} g_i(gh)f_i.$$

Поскольку f_i — базис, то $g_i(gh) = g_i(g)$ для всех $g \in G, h \in H$. Иными словами, $g_i \in \mathbb{C}[G]^H$. Остается показать, что $\sum_{i=1}^{k} g_i \otimes f_i \in (\mathbb{C}[G/H] \otimes A)^G$, т.е, что для любых $g, g' \in G$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(g^{-1}g')g.f_i = \sum_{i=1}^{k} g_i(g')f_i. \tag{2.1}$$

Пусть $g_{ij}(g)$ — матричный коэффициент G-модуля $\langle Gf \rangle$ в базисе $f_1, \ldots, f_n$, иными словами

$$g.f_j = \sum_{i=1}^{k} g_{ij}(g)f_i.$$

Условия того, что g_{ij} задают представление переписываются в виде

$$g_{ij}(gg') = \sum_{l=1}^{k} g_{il}(g)g_{lj}(g'), g_{ij}(e) = \delta_{ij}, \tag{2.2}$$

Далее, если $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$, то $g_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_{ij}$. Поэтому достаточно доказать (2.1) заменив g_i на g_{ij}.

Уравнение (2.1) переписывается в виде

$$\sum_{i,l=1}^{k} g_{ij}(g^{-1}g')g_{li}(g)f_l = \sum_{l=1}^{k} g_{lj}(g')f_l.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{k} g_{li}(g)g_{ij}(g^{-1}g') = [(2.2)] = g_{lj}(g').$$

$\square$