ЛЕКЦИЯ 11

Содержание

1. Локальное описание многогранника моментов

Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, V — G-модуль, $T \subset B$ — максимальный тор и борелевская подгруппа в G, Δ, Δ_+ — системы всех и положительных корней, $C \subset \mathfrak{t}(\mathbb{R})$ — соответствующая камера Вейля, K — компактная форма в G, для которой $T \cap K$ — максимальный тор в K. Фиксируем K-инвариантное эрмитово скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в V.

Пусть $X \subset \mathbb{P}(V)$ — неприводимое вложенное проективное многообразие. Имеем отображение моментов $\mu : X \to \mathfrak{k}$ и отображение $\psi : X \to C/i$, $\psi(x) = K\mu(x) \cap C/i$. Мы выяснили на прошлой лекции, что $\psi(X)$ является выпуклым многогранником (называемым многогранником моментов). Представляет (очень большой) интерес описание этого многогранника. В частности, можно задаться вопросом: при каких условиях на $x \in X$ точка $\psi(x)$ является вершиной многогранника моментов. Мы ограничимся лишь самым общим (и как следствие несложным) результатом, принадлежащим Сьямару.

Теорема 1. *Пусть точка $x \in X$ такова, что $\psi(x)$ является вершиной в $\psi(X)$. Тогда $[\mathfrak{k}_{\psi(x)}), \mathfrak{k}_{\psi(x)}] + \mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_{\psi(x)}$.*

Следствие 2. *Если G — тор, то многогранник моментов натянут на образы T-неподвижных точек.*

Доказательство теоремы 1. Можем считать, что $\eta = \mu(x) \in C/i$. Положим $H = K_x$. Предположим сначала, что x — гладкая точка. Поскольку действие $K : X^{reg}$ является гамильтоновым с отображением моментов μ, можем применить теорему о симплектическом слайсе из лекции 6. Она утверждает, что в малой окрестности точки x многообразие X устроено как малая окрестность точки $[e, (0, 0)]$ в однородном расслоение $K *_H (U \oplus V)$, где $U = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mu(x)) \cap \mathfrak{h}^{\perp}$, а V — симплектический K-модуль. Отображение моментов задается как $\mu([g, (u, v)]) = g(\eta + u + \mu_H(v))$, где $\mu_H : V \to \mathfrak{h}$ — отображение моментов. Положим $L = Z_K(\eta)$.

Предположим, что утверждение теоремы не выполнено. Тогда найдется $\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ лежащий в $\mathfrak{h}^{\perp}$ (достаточно взять ξ из ортогонального дополнения в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ к проекции $\mathfrak{k}_x$ на $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$. Для действительных t с достаточно малым модулем $\eta + t\xi \in \mu(X)$. Но $\eta + t\xi \in C/i$, ибо ξ как раз принадлежит плоскости грани камеры Вейля, внутри которой лежит η (элемент ξ лежит в $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$, а значит перпендикулярен в точности тем положительным корням, которые обращаются в 0 на η). Мы получили отрезок, содержащийся в многограннике и имеющий его вершину своей внутренней точкой. Так не бывает.

В случае, когда x не гладкая точка, можем перейти от X к неприводимой компоненте подмногообразия $X_1 \subset X^{sing} \subset X$ особых точек. Если $\psi(x)$ была вершиной в $\psi(X)$, то она будет вершиной и в $\psi(X_1)$. Применяя указанную редукция несколько раз, получаем требуемое. $\square$

2. Ранг и сложность G-многообразий. Орисферические действия и орисферическая деформация

Этот раздел посвящен обсуждению очень важных численных характеристик действий редуктивных групп: ранга и сложности. Также мы рассмотрим специальный класс действий на аффинных многообразиях: орисферические действия, впервые введенные Винбергом и Поповым, [1]. Также мы докажем теорему Попова о возможности деформации произвольного аффинного G-многообразия к орисферическому.

В этом разделе G — связная редуктивная группа, $T \subset B$ – её максимальный тор и борелевская подгруппа, а $U = B_u$.

2.1. **Определения ранга и сложности.** Для действия алгебраической группы H на неприводимом алгебраическом многообразии X положим $m_H(X) = \max_{x\in X} \dim Hx$. По теореме Розенлихта, см. [2],§2,

$$m_H(X) = \dim X - tr.deg \mathbb{C}(X)^H. \tag{2.1}$$

Определение 3. Пусть X — неприводимое G-многообразие. Сложностью действия $G : X$ называется число $c_G(X) = \dim X - m_B(X)$, рангом — число $\mathrm{rk}_G(X) = m_B(X) - m_U(X)$. Ранговой решеткой многообразия X называется подгруппа

$$\mathfrak{X}_G(X) = \{\chi \in \mathfrak{X}(T) | K(X)^{(B)}_\chi \neq 0\}.$$

($K(X)^{(B)}_\chi$ обозначает подпространство в $K(X)$, состоящее из B-полуинвариантных функций веса χ).

Предложение 4. *Для $x \in X$ общего положения имеют место равенства $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}_G(Gx), c_G(X) = c_G(Gx)+m_G(X)$. В случае, когда X — квазиаффинное многообразие, то в качестве базиса в $\mathfrak{X}_G(X)$ можно выбрать веса регулярных функций, $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{X}_G(X)$ (это объясняет термин "ранговая решетка"), $c_G(X) = tr.deg K[X]^U - \mathrm{rk}_G(X)$.*

Доказательство. Первые два равенства следуют непосредственно из определений.

Согласно (2.1), $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{tr}\,.deg_{K(X)^B} K(X)^U$. Покажем, прежде всего, что $K(X)^U = \mathrm{Quot}(K[X]^U)$. В самом деле, $K(X) = \mathrm{Quot}(K[X])$. Пусть теперь $f \in K(X)^U$. Рассмотрим подмножество $I = \{g \in K[X] | fg \in K[X]\}$. Это U-инвариантный идеал в $K[X]$. Но любой элемент $g \in I$ лежит в конечно-мерном регулярном U-подмодуле в I. Любой такой модуль содержит U-неподвижный вектор (например, по теореме Энгеля из теории алгебр Ли). Таким образом, существует $g \in I^U$. Это то, что требовалось. Аналогично доказывается, что любая функция из $K(X)^{(B)}$ представляется в виде частного двух B-полуинвариантных рациональных функций.

Отсюда следует, что $\mathrm{rk}_G(X) = tr.deg K[X]^U - tr.deg K(X)^B$ и что в качестве базиса в $\mathfrak{X}_G(X)$ можно выбрать регулярные функции. Но $K[X]^U$ — рациональная T-алгебра (теорема 2 предыдущей лекции), поэтому она порождается B-полуинвариантными регулярными функциями. Отсюда следует, что $K[X]^U$. Пусть это функции $f_1, \ldots, f_m$, с весами $\chi_1, \ldots, \chi_m$. Можем предположить, что $\chi_1, \ldots, \chi_k$ составляют базис в $\mathfrak{X}_G(X)$. Тогда для подходящих целых $a_{j1}, \ldots, a_{jk}, j > k$ имеем $f_j f_1^{a_{j1}} \ldots f_k^{a_{jk}} \in K(X)^B$. Таким образом, $\mathrm{tr}\,.deg K(X)^U \leqslant tr.deg K(X)^B + \mathrm{rk}\,\mathfrak{X}_G(X)$. Для доказательства обратного неравенства достаточно показать, что функции $f_1, \ldots, f_k$ алгебраически независимы над $K(X)^B$. Пусть

$$\sum a_{j_1,\ldots,j_k} f_1^{j_1} \ldots f_1^{j_k} \tag{2.2}$$

— уравнение алгебраической зависимости. Домножая на подходящий элемент из $K[X]^{(B)}$, можем считать, что $a_{j_1,\dots,j_k}$ — элементы из $K[X]^{(B)}$ одного веса. Теперь достаточно рассмотреть компоненту заданного веса в (2.2) и получить противоречие с тем, что $\chi_1, \dots, \chi_k$ составляют базис в $\mathfrak{X}_G(X)$.

Последнее равенство следует из предшествующего обсуждения. □

2.2. **Аффинные орисферические многообразия.**

Определение 5. Пусть X — G-многообразие. Оно называется *орисферическим*, если стабилизатор каждой точки содержит максимальную унипотентную подгруппу.

Важный пример аффинного орисферического многообразия доставляет $G//U := \operatorname{Spec}(K[G]^U)$. На прошлой лекции мы видели, что $K[G/U]$ как G-модуль изоморфно $\bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{X}(T)_+} V(\lambda)$. Отметим, что на G/U действует правыми сдвигами тор T. Поэтому имеем действие $T : \mathbb{C}[G]^U$ G-эквивариантными автоморфизмами. На модуле $V(\lambda)$ это есть ни что иное, как умножение на $\lambda(t)^{-1}, t \in T$. Отсюда мы видим, что $V(\lambda)V(\mu) = V(\lambda+\mu)$.

Теорема 6 ([1]). *Пусть X — аффинное G-многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $K[X]_{(\lambda)}K[X]_{(\mu)} \subset K[X]_{(\lambda+\mu)}$ *($K[X]_{(\lambda)}$ обозначает изотипную компоненту типа $V(\lambda)$).*
(2) *G-многообразие X является орисферическим.*

Доказательство. Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Более общо, мы покажем, что если A — рациональная G-алгебра (см. пункт 1.4 предыдущей лекции), удовлетворяющая условию $A_{(\lambda)}A_{(\mu)}$, то G-алгебры A и $(K[G]^U \otimes A^U)^T$. Поясним, что представляет собой вторая алгебра. На $K[G]^U$ имеем действие тора, определенное выше. На A^U тор действует так: $tf = \lambda(t)f$ для $f \in A^U_{(\lambda)}$. Группа G действует на первом сомножителе $K[G]^U \otimes A^U$. Действие тора на $K[G]^U \otimes A$ таково: $tf \otimes g = t.f \otimes t.g$. Оно перестановочно с действием группы G. Таким образом, алгебра $(K[G]^U \otimes A)^T$ наделяется структурой (очевидно, рациональной) G-алгебры. Легко видеть, что

$$(K[G]^U \otimes A^U)^T_{(\lambda)} = K[G]^U_{(\lambda)} \otimes A^U_{(\lambda)} \tag{2.3}$$

(ср. с вложением Сегре).

Поясним, почему требуемый изоморфизм дает требуемое. Для $A = K[X]$ имеем $\operatorname{Spec}((K[G]^U \otimes A^U)^T) = (G//U \times X//U)//T$. Многообразие $G//U \times X//U$ будет, очевидно, орисферическим. Поскольку морфизм факторизации сюръективен, то то же будет верно для $(G//U \times X//U)//T$.

Займемся доказательством изоморфизма $A \cong (\mathbb{C}[G]^U \otimes A^U)^T$. При доказательстве можем перейти к накрытию над G, и считать, что G является прямым произведением тора и односвязной полупростой группы. В этом случае $X(T)_+$ есть произведение решетки и моноида $\mathbb{Z}_+^m$. Поскольку $\mathbb{C}[G//U]^U \cong \mathbb{C}[\mathfrak{X}(T)_+]$, то можем выбрать элемент $f_\lambda \in \mathbb{C}[G//U]^U$ так, чтобы $f_\lambda f_\mu = f_{\lambda+\mu}, f_0 = 1$.

Имеем (канонический) изоморфизм G-модулей $V(\lambda)\otimes A^U_{(\lambda)} \to A_{(\lambda)}$. С другой стороны, выбор f_λ задает нам изоморфизм $V(\lambda) \otimes A^U_{(\lambda)} \to (K[G]^U \otimes A^U)^T_{(\lambda)}$ (см. (2.3)). Таким образом, получаем изоморфизм G-модулей $(K[G]^U \otimes A^U)^T \to A$. На U-инвариантах он устроен так: $f_\lambda \otimes g \mapsto g$ для $g \in A^U_{(\lambda)}$. То, что это изоморфизм алгебр следует из такой леммы

Лемма 7. *Пусть V_1, V_2, V — изотипные G-модули типов $\lambda, \mu, \lambda+\mu$. Тогда гомоморфизм G-модулей $V_1 \otimes V_2 \to V$ полностью определяется своим ограничением на $V_1^U \otimes V_2^U$.*

Доказательство леммы. Достаточно доказать лемму в случае, когда $V_1 = V(\lambda), V_2 = V(\mu)$. В этом случае она следует из того, что отображение $V(\lambda) \otimes V(\mu) \to V(\lambda+\mu)$ единственно с точностью до умножения на константу. $\square$

Задание умножения на A полностью определяется заданием отображений $A_{(\lambda)} \otimes A_{(\mu)} \to A_{(\lambda+\mu)}$. Теперь достаточно воспользоваться леммой и тем, что $f_\lambda f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (1). Для двух B-полуинвариантных функций f и g обозначим через $f \circ g$ компоненту произведения fg в $\sum_{\nu<\lambda+\mu} K[X]_\nu$. Нам надо доказать, что $f \circ g(x) = 0$ для всех $x \in X$. Имеем морфизм $\varphi : G/U \to Gx$. Очевидно, что $\varphi(f \circ g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$. Но $\varphi(f) \circ \varphi(g) = 0$ из градуированности алгебры $K[G]^U$. Поэтому $f \circ g(x) = 0$. $\square$

2.3. **Орисферическая деформация.** Здесь мы сопоставим каждому аффинному G-многообразию близкое орисферическое многообразие.

А именно, рассмотрим сначала рациональную G-алгебру A. Для $f \in A_{(\lambda)}, g \in A_{(\mu)}$ обозначим через $m(f,g)$ проекцию произведения fg на $A_{(\lambda+\mu)}$. Поскольку fg лежит в сумме $A_{(\lambda+\mu)}$ и различных компонент $A_{(\nu)}$, где ν меньше чем $\lambda+\mu$ (т.е. получается из $\lambda+\mu$ вычитанием некоторого количества положительных корней), то $f \otimes g \mapsto m(f,g)$ задает структуру коммутативной ассоциативной алгебры на A. Получившуюся алгебру мы будем обозначать через A_0. Имеет место G-модульный изоморфизм $A \cong A_0$. Однако структура алгебры на A значительно проще, чем исходная. Можно сказать, что A_0 — градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй A. Поскольку $A_0 \cong (K[G]^U \otimes A^U)^T$ (см. доказательство предыдущей теоремы), то A_0 — конечно-порожденная алгебра, если A такова.

Для G-многообразия X положим $X_0 := \mathrm{Spec}(K[X]_0)$. Это орисферическое G-многообразие, называемое *орисферической деформацией* многообразия X. Это действительно многообразия, алгебра $K[G]^U \otimes K[X]^U$, а тем более $(K[G]^U \otimes K[X]^U)^T$, не имеет нильпотентов. Аналогично мы видим, что если X — неприводимо, то и X_0 таково. Кроме того, U-факторы $X//U$ и $X_0//U$ канонически изоморфны.

Предложение 8. *Во введенных обозначениях, если многообразие X неприводимо, то* $c_G(X) = c_G(X_0), \mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}_G(X_0)$.

Доказательство. Напомним, что имеет место T-эквивариантный изоморфизм $\mathbb{C}[X]^U \cong \mathbb{C}[X_0]^U$. Согласно предложению 4, $\mathfrak{X}_G(X_0) = \mathfrak{X}_G(X)$. Теперь оба равенства следуют из предложения 4. $\square$

Рассмотрим теперь версию этой конструкции для вложенных проективных многообразий.

Пусть V — G-модуль, X — вложенное проективное G-многообразие. Рассмотрим конус $C(X)$ над X. Это аффинное $G \times \mathbb{C}^*$-подмногообразие в V. Пусть $C(X)_0$ — его орисферическая деформация. Эта алгебра уже не порождена, вообще говоря, своей компонентой степени 1, поэтому многообразие $\mathrm{Proj}(C(X)_0)$ не вложено в $\mathbb{P}(V)$. Как мы видели в лекции 7, эта проблему можно обойти заменив X подходящим d-кратным вложением. Т.е., можем считать, что X и $X_0 := \mathrm{Proj}(C(X)_0)$ вложены в $\mathbb{P}(V)$.

Предложение 9. $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}(X_0), c_G(X) = c_G(X_0), \mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}_G(X_0)$.

Доказательство. Отметим, что $G \times \mathbb{C}^*$-модульные структуры у $\mathbb{C}_h[X]$ и $\mathbb{C}_h[X_0]$. Отсюда следует совпадение многогранников Бриона.

Более того, $T \times \mathbb{C}^*$-алгебры $\mathbb{C}_h[X]^U$ и $\mathbb{C}_h[X_0]^U$ изоморфны. Ввиду предложения 4 теперь остается доказать, что $c_G(X) = c_{G\times\mathbb{C}^*}(C(X)), \mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{rk}_{G\times\mathbb{C}^*}(C(X))$. Это следует из того, что $\dim C(X) = \dim X + 1$, $m_B(X) + 1 = m_{B\times\mathbb{C}^*}(C(X))$, $m_U(X) = m_U(C(X))$. Поясним, к примеру, последнее равенство. Пусть $v \in C(X) \setminus \{0\}$, имеем U-эквивариантное отображение $Uv \to U[v]$. Слой этого отображения над $[v]$ состоит из одной точки, ибо равенство $uv = \lambda v$ с $\lambda \neq 1$ невозможно. Это дает равенство размерностей. Равенство $m_B(X) + 1 = m_{B\times\mathbb{C}^*}(C(X))$ получается аналогично, только слой будет равен $\mathbb{C}^* v$. $\square$

Отметим одну довольно понятную связь между $\mathrm{Br}(X)$ и $\mathfrak{X}_G(X)$. Мы можем рассмотреть подпространство в $\mathfrak{t}^*(\mathbb{R})$, состоящее из векторов параллельных $\mathrm{Br}(X)^*$ (иными словами, снесенное в 0 аффинное подпространство в $\mathfrak{t}^*$, порожденное $\mathrm{Br}(X)^*$). Обозначим его через $V(X)$.

Предложение 10. $V(X) = \mathfrak{X}_G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Доказательство. Многогранник $\mathrm{Br}(X)^*$ состоит из точек λ/n, где λ — старший вес в $\mathbb{C}_h[X]_n$. Поэтому $V(X)$ есть подпространство в $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$, порожденное разностями старших весов из $\mathbb{C}_h[X]_n$, при n пробегающем $\mathbb{N}$.

С другой стороны, вложим $\mathfrak{X}_G(X)$ в $\mathfrak{X}_{G\times\mathbb{C}^*}(C(X))$ (в соответствии с проекцией $C(X)\setminus\{0\} \to X$). Рациональные функции на X — это все равно, что $\mathbb{C}^*$-инвариантные рациональные функции на $C(X)$. Поэтому $\mathfrak{X}_G(X)$ состоит в точности из тех элементов в $\mathfrak{X}_{G\times\mathbb{C}^*}(C(X))$, которые тривиальны на $\mathbb{C}^*$. Иными словами, $X_G(X)$ состоит из разностей старших весов модуля $\mathbb{C}_h[X]_n$ при n пробегающем $\mathbb{N}$. Пространство $\mathfrak{X}_G(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}$ будет порождено такими разностями. $\square$

Пространство $\mathfrak{X}_G(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ называется *ранговым подпространством* для X и обозначается через $\mathfrak{a}_{G,X}$.

Литература

[1] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий. Известия АН СССР, сер. мат., 36(1972), с. 749-764.

[2] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989, 137-309.

[3] В.Л. Попов. Стягивание действий редуктивных алгебраических групп. Мат. сб., 130(1986), N3, с. 310-334.