ЛЕКЦИЯ 12

Содержание

1. Орисферичиские деформации. Продолжение.

1.1. **Совпадение размерности.** Пусть X — аффинное G-многообразие, X_0 — его орисферическая деформация. Напомним, что как G-модули алгебры $\mathbb{C}[X]$ и $\mathbb{C}[X_0]$ изоморфны. Структура алгебры на $\mathbb{C}[X_0]$ получается так: для $f \in \mathbb{C}[X]_{(\lambda)}, g \in \mathbb{C}[X]_{(\mu)}$ произведением в $\mathbb{C}[X_0]$ становится проекция fg на $\mathbb{C}[X]_{(\lambda+\mu)}$. Основной целью этого пункта является

Предложение 1. $\dim X = \dim X_0$.

Отсюда будет следовать аналогичное соотношение для проективного многообразия X.

Пусть A некоторая рациональная G-алгебра, а $A_0 \cong (K[G]^U \otimes A^U)^T$ — её орисферическая деформация. Мы сейчас зададим обычную целочисленную G-инвариантную фильтрацию на A, так чтобы A_0 отождествлялось с ассоциированной градуированной алгеброй $\mathrm{gr}\, A$.

Для этого возьмем элемент ρ из внутренности положительной камеры Вейля C, лежащий в $\mathfrak{X}(T)^*$. Положим $A_n = \bigoplus_{\lambda, \langle\lambda,\rho\rangle \leqslant n} A_{(\lambda)}$. Последовательность A_n определяет возрастающую G-инвариантную фильтрацию на A. Можем рассмотреть ассоциированную градуированную алгебру $\mathrm{gr}\, A = \sum_n A_n/A_{n-1}$. Как G-модуль эта алгебра совпадает с A, а произведением $f \in A_{(\lambda)}$, $g \in A_{(\mu)}$, $\langle\lambda,\rho\rangle = n, \langle\mu,\rho\rangle = m$ является проекция fg на $\sum_{\nu,\langle\nu,\rho\rangle=m+n} A_{(\nu)}$. Отметим, что поскольку ρ лежит во внутренности C, то

$$A_{(\lambda)}A_{(\mu)} \cap \sum_{\nu,\langle\nu-\lambda-\mu,\rho\rangle=0} A_{(\nu)} = A_{(\lambda+\mu)}.$$

Поэтому $\mathrm{gr}\, A \cong A_0$ (изоморфизм G-алгебр).

Поэтому предложение 1 является следствием следующего предложения:

Предложение 2. *Если A — коммутативная ассоциативная конечно-порожденная алгебра с единицей без делителей нуля, снабженная возрастающей неотрицательной фильтрацией с $A_0 = \mathbb{C}$. Предположим, что алгебра $\mathrm{gr}\, A$ конечно порождена. Тогда все неприводимые компоненты в $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\, A)$ имеют размерность $\dim \mathrm{Spec}(A)$.*

На самом деле, требование конечной порожденности алгебры A является излишним, это следует из конечной порожденности алгебры $\mathrm{gr}\, A$.

Доказательство. Рассмотрим следующую подалгебру $B \subset A[t], B = \bigoplus_{n\in N} t^n A_n$. То, что B — действительно подалгебра следует из свойств фильтрации. Выберем систему образующих $a_1, \ldots, a_n$ в $\mathrm{gr}(A)$ степеней $n_1, \ldots, n_k$ и представители $\overline{a}_i$ для a_i в A, $\overline{a}_i \in a_i + A_{n_i-1}$.

Упражнение 1. Элементы $t, t^{n_1}\overline{a}_1, \ldots, t^{n_k}\overline{a}_n$ порождают B.

Упражнение 2. Для $\alpha \in \mathbb{C}^*$ и $f \in A[t]$ включение $(t-\alpha)f \in B$ влечет $f \in B$.

Упражнение 3. Имеют место изоморфизмы $B/(t) \cong \mathrm{gr}\, A, B/(t-\alpha) \cong A$ для $\alpha \neq 0$.

Рассмотрим теперь морфизм $\mathrm{Spec}(B) \to \mathbb{A}^1$, индуцированный элементом $t \in B$. Отметим, что (схемный) слой этого морфизма над точкой 0 есть $\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\, A)$, а над всеми остальными точками — $\mathrm{Spec}(A)$. Отсюда видим, что $\dim \mathrm{Spec}(B) = \dim \mathrm{Spec}(A) + 1$. С другой стороны, $\mathrm{Spec}(B)$ — неприводимое многообразие, и, значит, $\dim \mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\, A) = \dim B - 1$. $\square$

2. Интерпретация ранга и сложности в терминах гамильтоновых действий

2.1. **Напоминание: дефект, ранг и коранг гамильтоновых действий.** Пусть K — компактная группа и X — гамильтоново K-многообразие с симплектической формой ω и отображением моментов μ.

Напомним, определения ранга, коранга и дефекта действия $K : X$ (они были введены в лекции 4).

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rk}_K(X) = \max_{x\in X} \mathrm{rk}\, \omega|_{Gx} = \dim K - \min_{x\in X} \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mu(x)).\\
&\mathrm{def}_K(X) = m_K(X) - \mathrm{rk}_G(X).\\
&\mathrm{cork}_K(X) = \dim X - \mathrm{rk}_K(X) - 2\,\mathrm{def}_K(X).
\end{aligned}$$

Пусть теперь K_0 — стабилизатор общего положения для действия $K : X$. В лекции 6 мы видели, что K_0 содержится в подгруппе Леви $L \subset K$, которая является централизтором минимальной возможной размерности элемента из $\mu(X)$, и содержит (L, L). Поэтому

$$\mathrm{rk}_K(X) = (\dim K - \mathrm{rk}\, K) - (\dim K_0 - \mathrm{rk}\, K_0). \tag{2.1}$$

$$\mathrm{def}_K(X) = \mathrm{rk}\, K - \mathrm{rk}\, K_0. \tag{2.2}$$

$$\mathrm{cork}_K(X) = \dim X - (\dim K + \mathrm{rk}\, K) + (\dim K_0 + \mathrm{rk}\, K_0). \tag{2.3}$$

2.2. **Основная теорема и её следствия.** Пусть G — связная редуктивная алгебраическая группа, V — G-модуль, $T \subset B$ — максимальный тор и борелевская подгруппа в G, Δ, Δ_+ — системы всех и положительных корней, $C \subset \mathfrak{t}(\mathbb{R})$ — соответствующая камера Вейля, K — компактная форма в G, для которой $T \cap K$ — максимальный тор в K. Фиксируем K-инвариантное эрмитово скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в V. Пусть $X \subset \mathbb{P}(V)$ — неприводимое вложенное проективное многообразие. Как G-многообразие X имеет ранг и сложность. Кроме того, для X определены многогранник Бриона $\mathrm{Br}(X)$ и ранговое пространство $\mathfrak{a}_{G,X}$. С другой стороны, действие $K : X^{reg}$ является гамильтоновым и для него определены стабилизатор общего положения K_0, коранг и дефект.

Выберем точку ξ из $\mathrm{Br}(X)$, которая лежит во внутренности минимальной грани камеры C, содержащей $\mathrm{Br}(X)$.

Теорема 3. *Во введенных обозначениях* $\mathrm{rk}_G(X) = \mathrm{def}_K(X^{reg})$, $c_G(X) = 2\,\mathrm{cork}_G(X^{reg})$. *Кроме того, подалгебра* $\mathfrak{a}^{*\perp}_{G,X} \cap \mathfrak{g}_\xi$ *является комплексификацией касательной алгебры стабилизатора общего положения для действия* $K : X^{reg}$.

Это дает способ вычисления $\mathrm{rk}_G(X), c_G(X)$ в случае, когда $X = G/H$ — однородное пространство. Известно, что существует редуктивная подгруппа $S \subset H$, для которой $H = S \leftthreetimes H_u$ (т.н. разложение Леви). Заменив, группу S на сопряженную можем считать, что $S_K := S \cap K$ является компактной формой в S. Отметим, что имеется естественное вложение $\mathfrak{k}/\mathfrak{s}_K = \mathfrak{k}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}) \hookrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Следствие 4. *Обозначим через S_0 стабилизатор общего положения для действия $S_K : (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{k}/\mathfrak{s}_K)$. Тогда S_0 — стабилизатор общего положения для действия $K : G/H$, $\mathrm{rk}_G(G/H) = \mathrm{rk}\, G - \mathrm{rk}\, S_0$, $c_G(G/H) = \dim_{\mathbb{C}} G - 2\dim_{\mathbb{C}} H - \mathrm{rk}\, G + \dim_{\mathbb{R}} S_0 + \mathrm{rk}\, S_0$.*

Доказательство. Заметим, что S_0-модуль в условии есть не что иное, как слайс-модуль к точке $eH \subset G/H$. Утверждение о стабилизаторе общего положения следует теперь из теоремы о слайсе.

Отметим, что однородное пространство G/H эквивариантно вкладывается в проективизацию некоторого G-модуля. Формулы для ранга и сложности следуют из теоремы 3 примененной к $X = \overline{G/H}$ и равенств (2.2),(2.3). □

Формулы предыдущего следствия (точнее, эквивалентные им) были получены Панюшевым, см. [1],[2].

2.3. **Связь ранга и дефекта гамильтонова действия с многогранником Бриона.** Везде ниже мы считаем, что многогранник Бриона $\mathrm{Br}(X)$ является действительным многогранником.

Напомним, что $\mathrm{Br}(X) = 2\pi i\psi(X)$, где $\psi(x) := K\mu(x)\cap C/i$. Отметим, что $\mu(X^{reg})$ — плотное подмножество в $\mu(X)$. Отсюда немедленно следует, что для элемента $\xi \in \mathrm{Br}(X)$, содержащегося во внутренности грани камеры Вейля, содержащей $\mathrm{Br}(X)$ имеет место равенство $\mathrm{rk}_K(X^{reg}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g} - \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi)$.

Докажем теперь, что $\mathrm{def}_K(X^{reg}) = \dim \mathrm{Br}(X)$. Вместе с предложением 10 из предыдущей лекции это докажет первое равенство теоремы.

Покажем сперва, что $\mathrm{def}_K(X^{reg}) \leqslant \dim \mathrm{Br}(X)$. Пусть C_0 — наименьшая грань камеры Вейля, содержащая $\mathrm{Br}(X)$ и C_0^0 — её внутренность. Положим $X^0 = X^{reg}\cap\psi^{-1}(C_0^0/i)$. Это открытое плотное подмножество в X^{reg} (оно состоит из точек $x \in X^{reg}$, для которых $\mathrm{rk}\,\omega|_{Kx}$ максимален). Отметим, что KC_0^0/i — гладкое подмногообразие в $\mathfrak{k}$ изоморфное $K/L\times C_0^0/i$, где L — централизатор произвольного элемента из C_0^0/i. Отображение $x \mapsto Kx\cap C$ на KC_0^0/i является проекцией $KC_0^0/i \cong K/L\times C_0^0/i \to C_0^0/i$. Отображение моментов отображает X^0 в KC_0^0/i. Отсюда видим, что $\psi : X^0 \to C_0^0/i$ является гладким отображением. Для общей точки $x \in X^0$ имеет место равенство $d_x\mu = \mathfrak{k}_x^*$. Отсюда заключаем, что $\dim d_x\psi = \dim\mathfrak{k}_x - \dim L = \mathrm{def}_K(X^0) = \mathrm{def}_K(X^{reg})$. Отсюда немедленно следует, что $\mathrm{def}_K(X^{reg}) \leqslant \dim \mathrm{Br}(X)$.

Пусть теперь $X_1,\ldots,X_k$ — неприводимые компоненты многообразия $X^{sing} = X \setminus X^{reg}$. Имеем включения $\psi(X_i)\subset\psi(X)$. Воспользовавшись соображениями индукции, можем считать, что $\dim\psi(X_i) = \mathrm{def}_K(X_i^{reg})$. С другой стороны, стабилизатор любой точки из X_i содержит подгруппу сопряженную с K_0 — стабилизатором общего положения для действия $K : X^{reg}$. Поэтому $\mathrm{def}_K(X_i) \leqslant \mathrm{def}_K(X)$. Если $\dim\psi(X_i) = \dim\psi(X)$ для некоторого i, то все доказано. В противном случае $\psi(X)\setminus\bigcup_i\psi(X_i)$ является плотным открытым подмножеством в $\psi(X)$. Поскольку $\psi(X)\setminus\bigcup_i\psi(X_i)\subset\psi(X^{reg})$, то $\psi(X_0^0)$ является плотным открытым подмножеством в $\psi(X)$. Значит $\mathrm{def}_K(X^{reg}) = \dim\psi(X_0^0) = \dim\psi(X)$.

2.4. **Равенство для сложности.** Сначала мы докажем оставшееся утверждение теоремы в случае, когда X — орисферическое многообразие. Поскольку стабилизатор в G любой точки из X содержит максимальную унипотентную подгруппу, и B имеет плотную орбиту в G/U, то $c_G(X) = \dim X - m_B(X) = \dim X - m_G(X)$. Выберем точку $x \in X$ общего положения. Орбита Gx есть гладкое комплексное (а, значит, симплектическое) подмногообразие. Таким образом, дефекты ограничения формы на $(\mathfrak{k}_* x)^\perp$ и на $\mathfrak{k}_* x^\perp \cap \mathfrak{g}_* x$ совпадают. Осталось доказать, что для действия $K : Gx$ коранг равен 0 (напомним, такие действия называются коизотропными). Согласно (2.3) это означает, что для $2\dim_{\mathbb{C}} G/H = \dim K + \operatorname{rk} K - \dim K_0 - \operatorname{rk} K_0$, где K_0 — стабилизатор общего положения для действия $K : G/H$. Теперь достаточно найти такую точку $x \in G/H$, что $2\dim_{\mathbb{C}} G/H = \dim K + \operatorname{rk} K - \dim K_x - \operatorname{rk} K_x$. Опять же, воспользовавшись разложением Леви, мы можем записать $H = S \leftthreetimes H_u$, где S — редуктивная подгруппа в H. Можем считать, что $S \cap K$ — компактная форма в S. Если U_1 — максимальная унипотентная подгруппа в S, то $\dim U_1 + \dim H_u = \dim U$, $\dim S = 2\dim U_1 + \operatorname{rk} S, \dim H = \dim U + \dim U_1 + \operatorname{rk} S$, $\dim G = 2\dim U + \operatorname{rk} G$. Имеем

$$\begin{aligned}
&2\dim_{\mathbb{C}} G/H - \dim G - \operatorname{rk} G + \dim S + \operatorname{rk} S \\
&= 2(\dim U + \operatorname{rk} G - \operatorname{rk} S - \dim U_1) - 2\dim U - 2\operatorname{rk} G + 2\dim U_1 + 2\operatorname{rk} S = 0.
\end{aligned}$$

Что и требовалось.

В общем случае достаточно доказать рассмотреть орисферическую деформацию X_0 многообразия X и доказать, что $\operatorname{cork}_K(X_0^{reg}) = \operatorname{cork}_K(X)$ (см. предложение 9 предыдущей лекции). Но коранг выражается через размерность, дефект и ранг гамильтонового действия. Согласно предыдущему пункту, ранг и дефект однозначно восстанавливаются по многограннику Бриона, который одинаков для X и X_0 (предложение 9 лекции 11). Размерности же у X и X_0 одинаковы.

2.5. **Описание стабильной подалгебры общего положения.** Выберем точку $x \in X^{reg}$, для которой $\mu(x) \in C/i$ содержится во внутренности максимальной возможной грани. В этом случае алгебра $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mu(x))$ имеет минимально возможную размерность.

Положим $\mathfrak{l}^{pr} = \{\xi \in \mathfrak{l} | \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\xi) \subset \mathfrak{l}\}$, $Y = X^{reg} \cap \mu^{-1}(L(C \cap \mathfrak{l}^{pr}))$. Напомним, см. лекцию 6, что Y — симплектическое подмногообразие в X, действие $L : Y$ — гамильтоново с отображением моментов $\mu|_Y$, и естественное отображение $G *_L Y \to X$ является открытым вложением (п. 1.1). Более того, стабилизатор общего положения L_0 для действия $L : Y$ содержит (L, L) (предложение 7), $\operatorname{def}_L(Y) = \operatorname{def}_K(X^{reg})$ (точнее, дефект любой связной компоненты многообразия Y равен $\operatorname{def}_K(X^{reg})$), $\operatorname{im}\psi_L = \psi(X^{reg}) \cap \mathfrak{l}^{pr}$, где ψ_L — отображение, отображающее точку $y \in Y$ в единственную точку пересечения орбиты $L\mu(y)$ и камеры Вейля C_L/i в $\mathfrak{l}$, содержащей C/i (предложение 6 п. 1.2 лекции 6).

Линейное подпространство в $V \subset \mathfrak{l}$, ассоциированное с аффинным подпространством натянутым на $\psi_L(Y)$ совпадает с $\mathfrak{l}_0^\perp$. Действительно, поскольку L_0 действует тривиально на Y, то ортогональная проекция $\mu(y)$ на $\mathfrak{l}_0$ состоит из одной точки. Поэтому $V \subset \mathfrak{l}_0^\perp$. С другой стороны, $\dim V \geqslant \operatorname{def}_L(Y) = \dim L - \dim L_0$.

Поскольку $\operatorname{im}\psi_L = \psi(X^{reg}) \cap \mathfrak{l}^{pr}$, то пространство V, указанное выше, совпадает с подпространством в $i\mathfrak{t}(\mathbb{R})$, ассоциированным с аффинным пространством, порожденным $\psi(X)$. Последнее же, согласно предложению 10 предыдущей лекции, совпадает с $\mathfrak{a}^*_{G,X} \cap i\mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Комплексифицируя, получаем требуемое.

Литература

[1] D.I. Panyushev. Complexity and rank of nilpotent orbits. Manuscripta Math., 83(1994), p.223-237.

[2] Д.И. Панюшев, Ранг и сложность в теории инвариантов (диссертация).