ЛЕКЦИЯ 2

Содержание

1. Кэлеровы многообразия

Кэлеровы формы — это, в некотором роде, правильные *вещественные* симплектические формы на *комплексных* многообразиях (на комплексных многообразиях также можно ввести понятие *голоморфной* симплектической формы, важно не путать эти два объекта).

Мы начнем с того, что напомним определение эрмитовой метрики на комплексном многообразии:

Определение 1. Пусть X — комплексное многообразие с операторами $I_z : T_zX \to T_zX$ умножения на i в касательных пространствах (см. пункт 1.5. лекции 1). Предположим, что задано отображение $ds^2_z : T_zX \otimes T_zX \to \mathbb{C}$, гладко зависящее от точки $z \in X$ и такое, что

$$ds^2_z(I_zv, u) = i(u, v), \forall z \in X, u, v \in T_zX, \tag{1.1}$$

$$ds^2_z(u, v) = \overline{ds^2_z(v, u)}, \forall z \in X, u, v \in T_zX, \tag{1.2}$$

$$ds^2_z(u, u) > 0, \forall z \in X, \forall u \in T_zX. \tag{1.3}$$

Сечение ds^2 соответствующего тензорного расслоения называется *эрмитовой метрикой* на X.

В комплексных координатах $z^1, \dots, z^n$ на координатной окрестности $U \subset X$ отображение ds^2, удовлетворяющее условиям (1.1), (1.2), записывается следующим образом:

$$ds^2_z = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(z) dz^i \otimes d\overline{z}^j, \tag{1.4}$$

где матрица $(h_{ij}(z))$ является эрмитовой. Условие (1.3) эквивалентно положительной определенности матрицы $(h_{ij}(z))$.

Как всякое отображение в комплексные числа, ds^2 определяет два отображения в вещественные числа, а именно, свои вещественную и мнимую части $\operatorname{Re} ds^2, \operatorname{Im} ds^2$.

Первое является римановой метрикой на X, а второе вещественно-значной $(1,1)$-формой. Положим $\omega = -\frac{1}{2}\operatorname{Im} ds^2$. В координатах имеем

$$\omega_z = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(z) dz^i \wedge d\overline{z}^j. \tag{1.5}$$

Условие (1.3) в терминах ω переписывается так:

$$\omega_z(I_z v, v) < 0, \forall z \in X, v \in T_z X. \tag{1.6}$$

Вещественно-значные (1,1)-формы ω, удовлетворяющие (1.6) называют *положительно определенными.* В координатном представлении (1.5) это эквивалентно положительной определенности матрицы $(h_{ij}(z))$.

Замечание 2. Итак, эрмитова метрика ds^2 задает положительно определенную вещественно-значную $(1,1)$-форму ω. Обратно, для такой формы ω

$$ds^2_z(u,v) = -2\omega_z(I_z u, v) - 2i\omega(u,v), z \in X, u, v \in T_z X$$

является эрмитовой метрикой на X.

Итак, мы построили по эрмитовой метрике 2-форму ω. Из (1.6) легко следует, что эта форма невырождена. Поскольку мы занимаемся симплектическими многообразиями, следующее определение выглядит вполне закономерным

Определение 3. Эрмитова метрика ds^2 (или форма ω) называется *кэлеровым (кэлеровой)*, если $d\omega = 0$.

Таким образом, кэлерова структура на многообразии естественным образом задает симплектическую.

Упражнение 1. Покажите, что $d\omega = 0$ тогда и только тогда, когда $\partial\omega = \overline{\partial}\omega = 0$.

Мы приведем два основных примера кэлеровых многообразий. Обе получающиеся симплектические структуры уже встречались нам в предыдущей лекции. Сначала совсем простенький.

Пример 4. $X = \mathbb{C}^n$ — комплексное векторное пространство, $ds^2 = \sum_i dz^i \otimes d\overline{z}^i$, где $z^1, \dots, z^n$ — базис в двойственном пространстве. Получающаяся симплектическая структура — это структура симплектического векторного пространства (п. 2.1 предыдущей лекции).

Теперь уже существенно посложнее.

Пример 5. Введем кэлерову структуру на комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$ прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$. Для этого нам будет достаточно задать замкнутую положительно определенную вещественно-значную $(1,1)$-форму ω (см. замечание 2).

Обозначим через $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ каноническую проекцию, сопоставляющую вектору $v \neq 0$ проходящую через него прямую $[v]$. Точку из $\mathbb{CP}^n$, являющуюся образом вектора $v = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ при проекции π мы обозначаем через $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$.

Найдется покрытие многообразия $\mathbb{CP}^n$ открытыми подмножествами U, для которых существуют голоморфные сечения $Z : U \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ проекции π. К примеру, можем взять i-ую аффинную карту U_i, состоящую из точек вида $[x_0 : x_1 : \dots x_{i_1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$ и $Z : U_i \to \mathbb{C}^{n+1}$, $[x_0 : x_1 : \dots x_{i_1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] \mapsto (x_0, x_1, \dots, x_{i_1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

На окрестности U с выбранным сечением Z мы полагаем

$$\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(||Z||^2). \tag{1.7}$$

Следующее упражнения показывает, что ω и есть то, что нам надо

Упражнение 2.
(1) Форма ω является корректно определенной (т.е. в точке $z \in \mathbb{CP}^n$ не зависит от выбора U и Z).
(2) Форма ω замкнута.
(3) Рассмотрим естественное действие группы $\mathrm{U}(n+1)$ унитарных матриц порядка $n+1$ на $\mathbb{CP}^n$ (индуцированное с $\mathbb{C}^{n+1}$). Докажите, что форма ω является инвариантной относительно этого действия.

(4) Форма ω является вещественно-значной формой типа $(1,1)$.
(5) Форма ω положительно определена.

Если что-то не будет получаться, то можно посмотреть в [1], гл.0, §2.

Таким образом, форма ω является кэлеровой, она называется формой Фубини-Штуди.

Следующая задача указывает нам, где мы встречали форму Фубини-Штуди раньше.

Задача 3. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{CP}^n \to \mathfrak{u}(n+1)^*$, определенное следующим образом:

$$\langle \varphi([v]), \xi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{\langle \xi v, v \rangle}{\langle v, v \rangle}, \xi \in \mathfrak{u}(n+1)^*, v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}. \tag{1.8}$$

Здесь в правой части $\langle , \rangle$ обозначает единственное (с точностью до умножения положительное действительное число) $\mathrm{U}(n+1)$-инвариантное эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$.

Докажите, что

(1) φ — диффеоморфизм $\mathbb{CP}^n$ на некоторую коприсоединенную $\mathrm{U}(n+1)$-орбиту.
(2) Отображение φ является $\mathrm{U}(n+1)$-эквивариантным (т.е. перестановочно с действием группы $\mathrm{U}(n+1)$).
(3) Обозначим через ω^{KK} форму Костанта-Кириллова на $\operatorname{im} \varphi$, а через ω форму Фубини-Штуди на $\mathbb{CP}^n$. Тогда $\varphi^* \omega^{KK} = \omega$.

Укажем теперь на способы конструирования новых кэлеровых многообразий из уже имеющихся.

Упражение 4. Определите (голоморфное) накрытие кэлерова многообразия и произведение двух кэлеровых многообразий (см. п.2.4 предыдущей лекции).

Приятным отличительным свойством кэлеровых многообразий является то, что комплексное подмногообразие кэлерова многообразия естественным образом наделяется кэлеровой структурой. Подробнее, пусть X — комплексное многообразие с кэлеровой формой ω, а Y — комплексное подмногообразие в X. Тогда форма $\omega|_Y (= \iota^* \omega)$, где ι — вложение Y в X, является кэлеровой. Действительно, мы должны проверить свойства формы $\omega|_Y$ быть вещественно-значной, положительно определенной и иметь тип (1,1). Все это непосредственно следует из того, что форма ω имела такие свойства.

Замечание 6. Свойство комплексного подмногообразия в кэлеровом многообразии быть симплектическим может быть распространено на произвольные симплектические многообразия. Дело в том, что на симплектическом многообразии X всегда можно ввести почти комплексную структуру (т.е. оператор $I_x \in \mathrm{GL}(T_x X)$ с $I_x^2 = -1$, гладко зависящий от x). При этом комплексные подмногообразия (т.е. такие подмногообразия $Y \subset X$, для которых $I_y T_y Y = T_y Y$ для всех $y \in Y$) будут симплектическими. Подробности приведены ниже в виде задачи.

Задача 5. Пусть X — симплектическое многообразие с симплектической формой ω. Как известно, на многообразии X можно выбрать риманову метрику (если не известно, то это пункт 0 задачи). Обозначим какую-либо такую метрику через ds^2.

(1) Определите по ω и ds^2 почти комплексную структуру на X.
(2) Докажите, что ограничение формы ω на подмногообразие $Y \subset X$ невырождено, если Y — комплексное подмногообразие в X (в смысле определения данного выше в замечании).
(3) Покажите, что если получающаяся почти комплексная структура является интегрируемой (т.е. на X можно ввести структуру комплексного многообразия с данным оператором I), то ω является кэлеровой формой, а ds^2 — вещественной частью кэлеровой эрмитовой метрики.

2. Симплектические и гамильтоновы векторные поля

В этом разделе X — симплектическое многообразие с симплектической формой ω.

2.1. **Симплектические векторные поля.** Зададимся вопросом о том, как описать симплектоморфизмы (т.е. диффеоморфизмы, сохраняющие симплектическую форму) многообразия X. Это вопрос очень сложный. То, что удается сделать, это описать локальные однопараметрические группы симплектоморфизмов. Любая такая группа имеет вид $\exp(t\xi)$ для некоторого векторного поля ξ. Как было отмечено в пункте 1.4 предыдущей лекции, условие $\exp(t\xi)_*\omega = \omega$ эквивалентно следующему

$$L_\xi \omega = 0. \tag{2.1}$$

Определение 7. Векторные поля $\xi \in \mathcal{V}ect(X)$, удовлетворяющие условию (2.1), называются *симплектическими.* Подмножество симплектических векторных полей в $\mathcal{V}ect(X)$ мы будем обозначать через $\mathcal{V}ect(X)_s$.

$\mathcal{V}ect(X)_s \subset \mathcal{V}ect(X)$ является подалгеброй Ли в $\mathcal{V}ect(X)$ (замкнутость относительно коммутатора следует из того, что $L_{[\xi,\eta]} = [L_\xi, L_\eta]$).

Приведем некоторые свойства симплектических векторных полей:

1) Симплектичность векторного поля ξ эквивалентна тому, что $\iota_\xi\omega$ является замкнутой формой. Это следует из того, что $d\iota_\xi + \iota_\xi d = -L_\xi$ (равенство (1.3) предыдущей лекции) и того, что $d\omega = 0$.

2) Пусть $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{V}ect(X)_s$. Тогда

$$\omega([\xi,\eta],\zeta) + \omega([\eta,\zeta],\xi) + \omega([\zeta,\xi],\eta) = 0 \tag{2.2}$$

$$L_\xi(\omega(\eta,\zeta)) + L_\eta(\omega(\zeta,\xi)) + L_\zeta(\omega(\xi,\eta)) = 0 \tag{2.3}$$

$$\omega([\xi,\eta],\zeta) = \partial_\zeta(\omega(\xi,\eta)). \tag{2.4}$$

Доказательство. Условие замкнутости формы ω переписывается как равенство левых частей равенств (2.2), (2.3) (равенство (1.7) предыдущей лекции). Применение леммы 6 из предыдущей лекции завершает доказательство равенств (2.2), (2.3). Для доказательства равенства (2.4) запишем

$$\partial_\zeta\omega(\xi,\eta) = -L_\zeta\omega(\xi,\eta) = [L_\zeta\omega = 0] = -\omega([\zeta,\xi],\eta) - \omega(\xi,[\zeta,\eta]) = [(2.3)] = \omega([\xi,\eta],\zeta).$$

□

Возникает однако естественный вопрос, а много ли существует симплектических векторных полей. Ответ будет дан в следующем пункте. Окажется, что каждой функции из $C^\infty(X)$ можно поставить в соответствие некоторое векторное поле.

2.2. **Гамильтоновы векторные поля.** Пусть $f \in C^\infty(X)$. Нашей задачей будет сопоставить функции f некоторое векторное поле. Вообще, на произвольном многообразии существует естественная 1-форма построенная по f, а именно, df. Но у нас задана симплектическая форма ω. Эта форма невырождена. Из линейной алгебры известно, что невырожденная билинейная форма позволяет отождествить пространство с его сопряженным, и, таким образом, задает взаимно-однозначное соответствие между ковекторами и векторами. Это дает мотивировку для следующего определения:

Определение 8. *Гамильтоновым векторным полем* функции f называется векторное поле $v(f)$ задаваемое равенством

$$\omega_x(v(f)_x, u) = \partial_u f, x \in X, u \in T_xX. \tag{2.5}$$

Поскольку форма ω невырождена, то уравнение (2.5) определяет поле $v(f)$ однозначно.

Замечание 9. Можно заметить сходство гамильтонова векторного поля с градиентом функции (в определении градиента вместо симплектической формы берется риманова метрика). По этой причине гамильтоново векторное поле $v(f)$ часто называется *косым градиентом* функции f и обозначается через $\mathrm{sgrad}(f)$. Это обозначение более информативно, нежели $v(f)$, но и более длинно, и поэтому мы не будем им пользоваться.

Множество всех гамильтоновых векторных полей обозначим через $\mathcal{V}ect(X)_h$. Имеем линейное отображение $C^\infty(X) \to \mathcal{V}ect(X)_h$. Отметим некоторые свойства гамильтоновых векторных полей.

1) По определению, $\iota_{v(f)}\omega = df$. Форма df точна, поэтому любое гамильтоново векторное поле является симплектическим (свойство 1 симплектических векторных полей). Обратно, если для некоторого векторного поля ξ форма $\iota_\xi\omega$ точна, то векторное поле ξ гамильтоново.

2) Ядро отображения $f \mapsto v(f)$ состоит из локально постоянных функций (постоянных, если многообразие X связно). Действительно, условие $v(f) = 0$ эквивалентно тому, что $df = 0$.

3) $v(fg) = gv(f) + fv(g)$.

Упражнение 6. Докажите последнее свойство.

Обсудим теперь вопрос о том, сколько существует гамильтоновых векторных полей и насколько отличаются пространства $\mathcal{V}ect(X)_s, \mathcal{V}ect(X)_h$. Ответы, соответственно, много и мало.

Лемма 10. *Гамильтоновы векторные поля $v(f)$ порождают касательное пространство T_xX в любой точке $x \in X$.*

Доказательство. Равенство (2.5) переписывается в виде $\omega(v(f)_x, u) = \langle d_x f, u\rangle$ для всех $u \in T_xX$. Поэтому размерности подпространств, порождаемых векторами $v(f)_x$ и ковекторами d_xf совпадают. Поэтому достаточно показать, что формы вида df порождают кокасательное пространство в любой точке. Напомним, как это делается.

Выберем координатную окрестность $U \subset X$ точки x с координатами $x^1, \dots, x^n$. Формы $d_xx^1, \dots d_xx^n$ порождают T_x^*X. Выберем теперь окрестность V точки x с $\overline{V} \subset U$. Найдется функция $\rho \in C^\infty(X)$ равная 1 на V и 0 вне U. Формы $d(\rho x^i) \in \Omega^1(X)$ порождают T_x^*X. □

Лемма 11. *Имеется естественный изоморфизм $\mathcal{V}ect(X)_s/\mathcal{V}ect(X)_h \cong H^1_{DR}(X)$ (первые когомологии Де Рама). В частности, если многообразие X односвязно, то $\mathcal{V}ect(X)_h = \mathcal{V}ect(X)_s$.*

Доказательство. Имеется изоморфизм $\mathcal{V}ect(X) \cong \Omega^1(X)$, который задается формулой $\xi \mapsto \iota_\xi\omega$. При этом изоморфизме симплектические векторные поля переходят в замкнутые 1-формы, а гамильтоновы — в точные. Отсюда следует требуемое. □

Следующая лемма демонстрирует, что и отличие между $\mathcal{V}ect(X)_s, \mathcal{V}ect(X)_h$ на уровне алгебр Ли является минимальным.

Лемма 12. *Для симплектических векторных полей ξ, η выполняется равенство*

$$v(\omega(\xi, \eta)) = [\xi, \eta]. \tag{2.6}$$

В частности, $[\mathcal{V}ect(X)_s, \mathcal{V}ect(X)_s] \subset \mathcal{V}ect(X)_h$.

Доказательство. Для доказательства равенства (2.6) мы должны показать, что для любого вектора $u \in T_xX$ имеет место равенство $\omega_x([\xi,\eta]_x, u) = \partial_u\omega(\xi, \eta)$. Гамильтоновы, и тем более симплектические, векторные поля порождают касательное пространство T_xX по лемме 10. Выберем $\zeta \in \mathcal{V}ect(X)_s$ с $\zeta_x = u$. Равенство (2.6) следует теперь из (2.4). □

Задача 7. Докажите, что группа симплектоморфизмов $\mathrm{Sympl}(X)$ многообразия X (напомним, что симплектоморфизм — это диффеоморфизм, сохраняющий симплектическую структуру) действует на X транзитивно, коль скоро многообразие X связно.

2.3. **Пример вычисления $v(f)$: случай коприсоединенных орбит.** Напомним, что у нас есть группа G, действующая на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ присоединенным, а на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ — коприсоединенным представлениями (см. пункт 2.3). Мы рассматриваем коприсоединенную орбиту $\mathcal{O}$, т.е. орбиту $\mathrm{Ad}^*(G)\alpha$ некоторого элемента $\alpha \in \mathfrak{g}^*$. На $\mathcal{O}$ вводится симплектическая форма Костанта-Кириллова ω, заданная равенством $\omega_\alpha(\xi_*, \eta_*) = \langle \alpha, [\xi, \eta] \rangle$ (напомним, что поля скоростей ξ_* порождают касательное пространство к $\mathcal{O}$ в любой точке).

Любой элемент $\xi \in \mathfrak{g}$ определяет функцию на $\mathfrak{g}^*$, и стало быть, на $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$. Мы будем обозначать эту функцию через H_ξ.

Лемма 13. *Отображение $\xi \mapsto H_x i : \mathfrak{g} \to C^\infty(\mathcal{O})$ является G-эквивариантным.*

Доказательство. Непосредственная проверка из определений. Именно,

$$\begin{aligned} g_* H_\xi(\alpha) &= [\text{ определение } g_*] = H_\xi(\mathrm{Ad}^*(g)^{-1}\alpha) = [\text{ определение } H_\xi] = \\ &= \langle \mathrm{Ad}^*(g)^{-1}\alpha, \xi \rangle = [\text{ определение } \mathrm{Ad}^*(g)] = \langle \alpha, \mathrm{Ad}(g)\xi \rangle = H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}(\alpha), \end{aligned}$$

иными словами $g_* H_\xi = H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}$, что и требовалось. □

Стандартное следствие из предыдущей леммы: $L_{\eta_*} H_\xi = H_{[\eta,\xi]}$ для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ (записать $\exp(t\eta)_* H_\xi = H_{\mathrm{Ad}(\exp(t\eta))\xi}$ и продифференцировать при $t = 0$).

Теперь все готово для доказательства следующего предложения

Предложение 14. *Имеет место равенство $v(H_\xi) = \xi_*$.*

Доказательство. Поскольку векторные поля $\eta_*, \eta \in \mathfrak{g}$, порождают касательное пространство к $\mathcal{O}$ в любой точке, то достаточно доказать равенство $\omega(\xi_*, \eta_*) = \partial_{\eta_*} H_\xi$ (ср. доказательство леммы 12). По определению формы ω, имеем $\omega(\xi_*, \eta_*) = H_{[\xi,\eta]}$. С другой стороны, $\partial_{\eta_*} H_\xi = -L_{\eta_*} H_\xi = -H_{[\eta,\xi]} = H_{[\xi,\eta]}$ по лемме 13. □

Пример вычисления для кокасательных расслоений будет приведен в следующей лекции.

Упражение 8. Выберите невырожденную кососимметрическую билинейную форму на векторном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ и выпишите вектор $v(f)$ для $f \in C^\infty(V)$.

3. Скобка Пуассона

Сначала чисто алгебраическое определение

Определение 15. Пусть A — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над полем k. *Скобкой* на A называется билинейная операция $\{\cdot,\cdot\} : A \otimes_k A \to A$, удовлетворяющая следующим условиям

$$\{a, a\} = 0, \forall a \in A. \tag{3.1}$$

$$\{a, bc\} = b\{a, c\} + c\{a, b\}, \forall a, b, c \in A. \tag{3.2}$$

Скобка $\{\cdot,\cdot\}$ называется *пуассоновой* (или *скобкой Пуассона*), если она удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0. \tag{3.3}$$

Алгебра A, снабженная скобкой Пуассона, называется *пуассоновой*.

Замечание 16. Тождество (3.1) при $\mathrm{char}(k) \neq 2$ эквивалентно кососоммутативности скобки, т.е. тому, что $\{a, b\} = -\{b, a\}$. Тождество Лейбница можно переформулировать так: операция $\{a, \cdot\} : A \to A$ является дифференцированием алгебры A. Тождества (3.1),(3.3) вместе означают, что пуассонова скобка $\{\cdot, \cdot\}$ является коммутатором в алгебре Ли. Когда говорят об алгебре Пуассона как об алгебре Ли, то имеют в виду именно этот коммутатор.

Наша основная цель в этом разделе состоит в том, чтобы ввести естественную скобку Пуассона на алгебре гладких функций симплектического многообразия X.

Положим

$$\{f, g\} = \omega(v(f), v(g)), f, g \in C^\infty(X). \tag{3.4}$$

Из определения гамильтонова векторного поля $v(f)$ (определение 8) следует, что

$$\{f, g\} = L_{v(f)}g = -L_{v(g)}f. \tag{3.5}$$

Равенство (3.4) дает нам кососимметричность, в то время как (3.5) дает тождество Лейбница. Осталось проверит, что для $\{\cdot, \cdot\}$ выполняется тождество Якоби.

Для этого мы заметим, что поскольку $v(f), v(g)$ — симплектические векторные поля, то лемма 12 дает

$$v(\{f, g\}) = v(\omega(v(f), v(g))) = [v(f), v(g)]. \tag{3.6}$$

Теперь то, что $\{\cdot, \cdot\}$ удовлетворяет тождеству Якоби следует из такого вычисления:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = [\text{определение скобки}] = \omega(v(f), v(\{g, h\}))+$$
$$+\,\omega(v(g), v(\{h, f\})) + \omega(v(h), v(\{f, g\})) = [(3.6)] = \omega(v(f), [v(g), v(h)])+$$
$$+\,\omega(v(g), [v(h), v(f)]) + \omega(v(h), [v(f), v(g)]) = [(2.2)] = 0, \forall f, g, h \in C^\infty(X).$$

Отметим, что из (3.6) следует, что отображение $f \mapsto v(f) : C^\infty(X) \to \mathcal{V}ect(X)_h$ является эпиморфизмом алгебр Ли. Ядро этого эпиморфизма состоит из локально постоянных на X функций.

В заключение упражнение на вычисление скобок Пуассона.

Упражение 9. Вычислите скобку функций H_ξ, H_η на коприсоединенной орбите, и скобку двух гладких функций на симплектическом векторном пространстве.

Литература

[1] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической геометрии// М.:Мир, 1982.