ЛЕКЦИЯ 3

Содержание

1. Вычисление гамильтоновых векторных полей. Продолжение

В этом разделе мы продолжим вычисление гамильтоновых векторных полей для различных классов функций на симплектических многообразиях, начатое в предыдущей лекции.

1.1. **Кокасательные расслоения.** Пусть X — гладкое многообразие. Мы рассматриваем кокасательное расслоение T^*X с проекцией $\pi : T^*X \to X$ и симплектической формой ω, введенной в пункте 2.2 лекции 1. Определение симплектической структуры на кокасательном расслоении было дано в пункте 2.2. лекции 1. Там же были определены два специальных класса функций на T^*X: функции $\pi^*(f), f \in C^\infty(X)$, (постоянные на слоях), и функции линейные на слоях, задаваемый векторными полями $\xi \in \mathcal{V}ect(X)$. Во избежание путаницы в вычислениях мы будем обозначать последние через H_ξ. Напомним также, что (локальный) диффеоморфизм g многообразия X может быть поднят до (локального) диффеоморфизма многообразия T^*X, который мы обозначаем через $\widetilde{g}$. Очевидно, что отображение $g \mapsto \widetilde{g}$ является гомоморфизмом групп.

В координатах $q^i, p^i, i = \overline{1,n}$ (см. пункт 2.2 лекции 1) можно записать:
$\pi^*(f)(q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n) = f(q^1, \ldots, q^n)$.
$H_\xi(q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n) = f_1 p^1 + \ldots f_n p^n$ для $\xi = f_1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial g^n}$.
Из этого координатного представления имеется следующее следствие

Лемма 1. *Пусть $x \in X, f_1, \ldots f_i \in C^\infty(X), \xi_1, \ldots, \xi_j \in \mathcal{V}ect(X)$ таковы что*

$$\langle d_x f_1, \ldots, d_x f_i \rangle = T_x^* X, \langle \xi_{1x}, \ldots, \xi_{jx} \rangle = T_x X.$$

Тогда для всех $y \in \pi^{-1}(x)$ имеет место равенство

$$\langle d_y \pi^*(f_1), \ldots, d_y \pi^*(f_i), d_y H_{\xi_1}, \ldots, d_y H_{\xi_j} \rangle = T_y^*(T^*X).$$

Докажем теперь следующую лемму (эквивариантность отображений $f \mapsto \pi^*(f), \xi \mapsto H_\xi$ относительно локальных диффеоморфизмов).

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\widetilde{g}_* \pi^*(f) = \pi^*(g_* f). \tag{1.1}$$

$$\widetilde{g}_* H_\xi = H_{g_* \xi}. \tag{1.2}$$

Напомним, что звездочка под (локальным) диффеоморфизмом означает его образ при действии на тензорных полях.

Доказательство. Первое равенство очевидно из определений $\pi^*(f), \widetilde{g}$. Для доказательство второго заметим, что для $x \in X, \beta \in T^*_x X$

$$\widetilde{g}_* H_\xi(x,\beta) = [\text{определение действия } \widetilde{g} \text{ на функциях}] = H_\xi(\widetilde{g}^{-1}(x,\beta)) =$$
$$= [\text{определение } \widetilde{g}] = H_\xi(g^{-1}x, g_*^{-1}\beta) = [\text{определение} H_\xi] = \langle \xi_{g^{-1}x}, g_*^{-1}\beta\rangle =$$
$$= [\text{определение } g_*] = \langle (g_*\xi)_x, \beta\rangle = H_{g_*\xi}(x,\beta).$$

Что и требовалось. □

Напомним также, что у нас имелось два типа векторных полей на T^*X. По 1-форме $\gamma \in T^*X$ строилось постоянное на слоях векторное поле $\widetilde{\gamma}$. По векторному полю $\xi \in \mathcal{V}ect(X)$ строилось структурное векторное поле $\widetilde{\xi}$. Напомним, что (корректно определенные) векторные поля $d\pi(\widetilde{\gamma}), d\pi(\widetilde{\xi})$ были равны 0 и ξ соответственно, а поля $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\xi}$ порождали касательное пространство к T^*X в любой точке. Из леммы 2 следует, что

$$L_{\widetilde{\eta}}\pi^*(f) = \pi^*(L_\eta f), \tag{1.3}$$
$$L_{\widetilde{\eta}} H_\xi = H_{[\eta,\xi]} \tag{1.4}$$

для $f \in C^\infty(X), \xi \in \mathcal{V}ect(X)$.

Соответствия $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma}, \xi \mapsto \widetilde{\xi}$ снова эквивариантны относительно диффеоморфизмов:

Лемма 3. *Для локального диффеоморфизма g многообразия X имеют место равенства*

$$\widetilde{g}_*\widetilde{\gamma} = \widetilde{g_*\gamma}. \tag{1.5}$$
$$\widetilde{g}_*\widetilde{\xi} = \widetilde{g_*\xi}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Мы должны доказать, что для $f \in C^\infty(T^*X)$ производные функции f по направлению левой и правой части каждого из двух равенств совпадают. При этом совпадение производных достаточно проверить для такого набора функций, что дифференциалы функций из набора порождают кокасательное пространство к T^*X в любой точке. Таким набором является, скажем, множество $\{\pi^*(F), H_\eta, F \in C^\infty(X), \xi \in \mathcal{V}ect(X)\}$.

Итак, нам надо доказать четыре равенства

$$L_{\widetilde{g}_*\widetilde{\gamma}}\pi^*(F) = L_{\widetilde{g_*\gamma}}\pi^*(F),$$
$$L_{\widetilde{g}_*\widetilde{\gamma}} H_\eta = L_{\widetilde{g_*\gamma}} H_\eta,$$
$$L_{\widetilde{g}_*\widetilde{\xi}}\pi^*(F) = L_{\widetilde{g_*\xi}}\pi^*(F),$$
$$L_{\widetilde{g}_*\widetilde{\xi}} H_\eta = L_{\widetilde{g_*\xi}} H_\eta.$$

Мы докажем лишь четвертое, остальные остаются читателям в качестве упражнения.

$$L_{\widetilde{g}_*\widetilde{\xi}} H_\eta = [\text{ свойство 3 производной Ли, лекция 1, п. 1.3}] = \widetilde{g}_* L_\xi \widetilde{g}_*^{-1} H_\eta = [(1.2)] =$$
$$= \widetilde{g}_* L_\xi H_{g_*^{-1}\eta} = [(1.4)] = \widetilde{g}_* H_{[\xi, g_*^{-1}\eta]} = [(1.2)] = H_{g_*[\xi, g_*^{-1}\eta]} = [\text{инвариантность } [\cdot,\cdot]] =$$
$$= H_{[g_*\xi,\eta]} = [(1.4)] = L_{\widetilde{g_*\xi}} H_\eta.$$

□

Следствие 4. *Для $\xi, \eta \in \mathcal{V}ect(X), \gamma \in \Omega^1(X)$ имеют место равенства*

$$[\widetilde{\eta}, \gamma] = L_{\widetilde{\eta}}\widetilde{\gamma} = \widetilde{L_\eta \gamma}, \tag{1.7}$$
$$[\widetilde{\eta}, \widetilde{\xi}] = L_{\widetilde{\eta}}\widetilde{\xi} = \widetilde{L_\eta \xi} = \widetilde{[\eta,\xi]}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Следует из предыдущей леммы (подстановка $\exp(t\eta)$ вместо g и дифференцирование в точке $t = 0$) и свойства 4 производной Ли (см. п.1.2 лекции 1). $\square$

Замечание 5. Нами было проверено уже немало "эквивариантностей относительно локальных диффеоморфизмов". На самом деле, все эти эквивариантности можно просто "заболтать". Достаточно сказать, что все объекты для которых она проверялась (и те для которых проверка опускалась) определены *естественно* и *бескоординатно*, и, таким образом, не зависели от выбора координат. В то же время, локальный диффеоморфизм есть ни что иное, как замена координат (с некоторыми естественными уточнениями, скажем $\widetilde{g}$ — замена координат на T^*X, согласованная с заменами координат на базе). Эквивариантность будет означать ни что иное, как независимость от выбора координат.

Упражнение в том же духе

Упражение 1. Пусть X — симплектическое многообразие с формой ω, g — (локальный) симплектоморфизм (т.е. диффеоморфизм сохраняющий форму ω), и $f \in C^\infty(X)$. Тогда

$$v(g_*f) = g_*v(f). \tag{1.9}$$

Определение векторного поля $v(f)$ см. в п.2.2 лекции 2 (определение 8).

Итак мы в плотную подошли к вычислению гамильтоновых векторных полей $v(f)$ для $f = \pi^*(F), f = H_\xi, F \in C^\infty(X), \xi \in \mathcal{V}ect(X)$.

Предложение 6. *Имеют место равенства*

$$v(\pi^*(F)) = -\widetilde{dF}, \tag{1.10}$$

$$v(H_\xi) = \widetilde{\xi}. \tag{1.11}$$

Доказательство. Поскольку векторные поля $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\eta}$ с $\gamma \in \Omega^1(X), \eta \in \mathcal{V}ect(X)$ порождают касательное пространство к T^*X в любой точке, нам достаточно доказать, что (см. определение 8 предыдущей лекции)

$$\begin{aligned}
\omega(-\widetilde{dF}, \widetilde{\gamma}) &= \partial_{\widetilde{\gamma}}\pi^*(F),\\
\omega(-\widetilde{dF}, \widetilde{\eta}) &= \partial_{\widetilde{\eta}}\pi^*(F),\\
\omega(\widetilde{\xi}, \widetilde{\gamma}) &= \partial_{\widetilde{\gamma}}H_\xi,\\
\omega(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) &= \partial_{\widetilde{\eta}}H_\xi.
\end{aligned}$$

Это легкое следствие равенств (2.5)-(2.7) из лекции 1, равенств (1.1),(1.2), (1.7),(1.8) этой лекции и того, что $\widetilde{\gamma}$ — постоянное векторное поле касательное к слоям, а функции $\pi^*(F), H_\xi$ постоянны и линейны на слоях, соответственно. $\square$

Упражение 2. Вычислите скобки Пуассона от функций $\pi^*(F_1), \pi^*(F_2), H_{\xi_1}, H_{\xi_2}$.

1.2. **Симплектические подмногообразия.** Пусть X — симплектическое многообразие с формой ω, а Y — симплектическое подмногообразие в X (см. лекция 1, п.2.4). Для точки $y \in Y$ имеем разложение $T_yX = T_yY \oplus (T_yY)^\perp$. Обозначим через $\pi_y : T_yX \to T_yY$ проекцию, соответствующую этому разложению.

Предложение 7. *Для $y \in Y$ и $f \in C^\infty(X)$ имеет место равенство $v(f|_Y)_y = \pi_y(v(f))$.*

Доказательство. По определению, для $u \in T_yY$ имеем $\omega_y(v(f|_Y), u) = \partial_u f|_Y(y) = \partial_u f(y) = \omega_y(v(f), u)$, что дает требуемое. $\square$

2. Гамильтоновы действия и отображение моментов

2.1. **Определение гамильтоновых действий.** Нас будут интересовать действия групп Ли на симплектических многообразиях симплектоморфизмами. Такие действия мы будем называть *симплектическими*.

Не все симплектические действия в одинаковой степени поддаются исследованию. Имеется некоторый класс хороших симплектических действий — *гамильтоновы* действия.

Для того, чтобы как-то мотивировать данное ниже определение сделаем несколько замечаний. Пусть X — симплектическое многообразие, G — группа Ли, действующая на X симплектически, а $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. Векторные поля скоростей ξ_* являются симплектическими. Нам удобнее работать не с произвольными симплектическими, но с гамильтоновыми векторными полями. Поэтому, первое, что мы будем требовать от нашего действия, это то, чтобы для всех $\xi \in \mathfrak{g}$ нашлась функция $H_\xi \in C^\infty(X)$, для которой $v(H_\xi) = \xi_*$. Ясно, что если такие функции нашлись, то из линейности отображения $f \mapsto v(f)$, можно выбрать H_ξ так, чтобы отображение $\xi \mapsto H_\xi$ было линейным.

Однако требования существования линейного отображения $\xi \mapsto H_\xi$ с $v(H_\xi) = \xi_*$ нам будет недостаточно (хотя иногда этим и ограничиваются). Отметим, что из (1.9) следует, что для $\xi \in G, g \in G$ следует, что $v(g_*H_\xi) = v(H_{\mathrm{Ad}(g)\xi})$, иными словами, $g_*H_\xi - H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}$ является локально постоянной (постоянной в случае связного многообразия X) функцией. Весьма естественным пожеланием является выполнение равенства $g_*H_\xi = H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}$, т.е. эквивариантности отображения $\xi \mapsto H_\xi$. Таким образом, получаем следующее

Определение 8. Симплектическое действие $G : X$ вместе с линейным отображением $\xi \mapsto H_\xi : \mathfrak{g} \to C^\infty(X)$ называется *гамильтоновым*, если выполняются следующие условия:

(H1) $v(H_\xi) = \xi_*$ для всех $\xi \in \mathfrak{g}$.
(H2) $g_*H_\xi = H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}$, для всех $\xi \in \mathfrak{g}, g \in G$.

Функции H_ξ называются *гамильтонианами* действия. Многообразие X, снабженное гамильтоновым действием, мы будем называть *гамильтоновым G-многообразием.*

Сделаем несколько замечаний по поводу сделанного определения:

1) Из одного условия (H1) следует, что векторные поля ξ_* являются симплектическими. Отсюда стандартным образом выводится, что связная компонента единицы G° группы G действует на X симплектоморфизмами. Так что, для связной группы Ли G в определении можно не требовать симплектичности действия.

2) Обычно определение гамильтонова действия (в наиболее распространенном случае связной группы) дается несколько иначе. А именно, вместо условия (H2) требуют выполнения следующего условия

(H2') $\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi,\eta]}$.

Напомним, что через $\{\cdot,\cdot\}$ обозначена скобка Пуассона на X (см. раздел 3 предыдущей лекции). Условие (M2') эквивалентно тому, что отображение $\xi \mapsto H_\xi$ является гомоморфизмом алгебр Ли. Наше определение оправдывается следующим утверждением

Лемма 9. *Для связной группы G из выполнения условия (H1) следует эквивалентность условий (H2),(H2').*

Доказательство. Условие (H2) эквивалентно тому, что для $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ верно равенство

$$L_{\xi_*}H_\eta = H_{[\xi,\eta]}. \tag{2.1}$$

(следствие (2.1)$\Rightarrow$(H2) следует из теоремы об однозначной разрешимости ОДУ). Но из (H1) имеем

$$L_{\xi_*}H_\eta = L_{v(H_\xi)}H_\eta = \{H_\xi, H_\eta\}. \tag{2.2}$$

Последнее равенство следует из (3.5) предыдущей лекции. Сопоставляя (2.1) и (2.2) приходим к требуемому. $\square$

2.2. **Отображение моментов.** Вот мы и подошли к расшифровке названия нашего курса.

Определение 10. Пусть G — группа Ли, гамильтоново действующая на симплектическом многообразии X с гамильтонианами H_ξ. Гладкое отображение $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$, задающееся по формуле

$$\langle \mu(x), \xi\rangle = H_\xi(x), \xi \in \mathfrak{g}, x \in X, \tag{2.3}$$

называется *отображением моментов.*

Перепишем свойства (H1),(H2),(H2') в терминах отображения моментов. Условие (H2) переписывается в виде

(M2) Отображение $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ является G-эквивариантным.

Условие (H1) запишется так

(M1) $\langle d_x\mu(v), \xi\rangle = \omega(\xi_*x, v), x \in X, v \in T_xX, \xi \in \mathfrak{g}$.

Действительно,

$$\langle d_x\mu(v), \xi\rangle = \partial_v\langle \mu(x), \xi\rangle = \partial_v H_\xi(x) = [(2.5) \text{ лекции } 2] = \omega_x(v(H_\xi), v).$$

Эквивалентность (H1)$\Leftrightarrow$(M1) следует теперь из невырожденности формы ω_x.

Теперь мы можем сказать, что гамильтоново действие $G : X$ есть симплектическое действие, снабженное отображением $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$, удовлетворяющим (M1),(M2).

Выведем несколько полезных следствий из (M1).

Следствие 11. *Для $x \in X$ имеют место равенства*

$$\ker d_x\mu = (\mathfrak{g}_*x)^\perp, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{im} d_x\mu = (\mathfrak{g}_x)^0, \tag{2.5}$$

где верхний индекс 0 обозначает аннулятор в сопряженном пространстве.

Доказательство. Равенство (2.4) следует непосредственно из (M1). Для доказательства равенства (2.5) заметим, что, согласно (M1), подпространство $\operatorname{im} d_x\mu \subset \mathfrak{g}^*$ состоит в точности из функций вида $\{\rho^*(\alpha)\}$, где через ρ обозначено отображение $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_*x, \xi \mapsto \xi_*$, а α — элемент из $(\mathfrak{g}_*x)^*$ вида

$$u \mapsto \omega_x(u, v), u \in \mathfrak{g}_*x, \tag{2.6}$$

для некоторого $v \in T_x^*X$. Поскольку форма ω_x невырождена, любой элемент из $(\mathfrak{g}_*x)^*$ имеет вид (2.6). Теперь осталось заметить, что $\rho^*(\mathfrak{g}_*x) = (\ker\rho)^0$, $\ker\rho = \mathfrak{g}_x$. $\square$

В качестве ещё одного следствия мы получим описание ограничения формы ω на орбиту. Для этого нам потребуется следующая общая лемма.

Лемма 12. *Пусть X, Y — гладкие многообразия с действием группы G, и $\varphi : X \to Y$ — G-эквивариантное гладкое отображение. Тогда*

$$d_x\varphi(\xi_*x) = \xi_*\varphi(x) \tag{2.7}$$

для всех $x \in X, \xi \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Напомним определение векторов $\xi_* x, \xi_*\varphi(x)$ (лекция 1, п.1.4). Рассматриваются отображения $\varphi^X : G \to X, g \mapsto gx, \varphi^Y : G \to Y, g \mapsto g\varphi(x)$. Тогда $\xi_* x = d_e\varphi^X(\xi), \xi_*\varphi(x) = d_e\varphi^Y(\xi)$. Теперь требуемое следует из очевидного равенства $\varphi \circ \varphi^X = \varphi^Y$ и правила дифференцирования композиции. □

Следствие 13. *Пусть $x \in X$. Обозначим через ω^{KK} форму Костанта-Кириллова на коприсоединенной орбите* $\mathrm{Ad}^*(G)\mu(x)$. *Тогда*

$$\omega|_{Gx} = \mu^*\omega^{KK}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Отметим, что, что для всех $x \in X, \xi\eta \in \mathfrak{g}$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \omega_x(\xi_* x, \eta_* x) = [(H1)] = \omega_x(v(H_\xi), v(H_\eta)) = \{H_\xi, H_\eta\}(x) = \\ = [(H2')] = H_{[\xi,\eta]}(x) = \langle \mu(x), [\xi, \eta]\rangle. \end{aligned} \tag{2.9}$$

С другой стороны, из определения формы Костанта-Кириллова (п. 2.3 лекции 1)

$$\begin{aligned} \langle \mu(x), [\xi, \eta]\rangle = \omega^{KK}_{\mu(x)}(\xi_*\mu(x), \eta_*\mu(x)) = [(2.7)] = \\ = \omega^{KK}_{\mu(x)}(d_x\mu(\xi_* x), d_x\mu(\eta_* x)) = (\mu^*\omega^{KK})_x(\xi_* x, \eta_* x). \end{aligned}$$

□

Перейдем к условию (H2'). Для того, чтобы его записать, заметим, что на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ существует естественная скобка Пуассона. Она задается формулой

$$\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g]\rangle, \alpha \in \mathfrak{g}^*, f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \tag{2.10}$$

Отметим, что $d_\alpha f, d_\alpha g$ суть элементы из $(\mathfrak{g}^*)^* \cong \mathfrak{g}$, и их коммутатор — это просто коммутатор в $\mathfrak{g}$. Отметим, что для линейных $f, g \in \mathfrak{g}$ скобка $\{f, g\}$ совпадает с $[f, g]$.

Условие (H2') записывается так:

(M2') μ — морфизм пуассоновых многообразий. По определению, это означает, что $\mu^* : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(X)$ является гомоморфизмом пуассоновых алгебр.

2.3. **Примеры и конструкции гамильтоновых действий.**

Пример 14. *Коприсоединенные орбиты.* Пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ и $X = \mathrm{Ad}^*(G)\alpha$ — коприсоединенная орбита с формой Костанта-Кириллова. Группа G естественным действует на X симплектоморфизмами. Пусть H_ξ те же, что в п.2.3 предыдущей лекции. Условия (H1),(H2) были проверены там же. Таким образом, действие $G : X$ является гамильтоновым. Отображение моментов есть ни что иное, как вложение $X \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$.

В частности, пусть $X = \mathbb{CP}^n, G = \mathrm{U}(n+1)$. Согласно задаче 3 предыдущей лекции, действие $G : X$ гамильтоново, а отображение моментов задается равенством (1.8).

Пример 15. *Кокасательные расслоения.* Пусть X — гладкое многообразие с действием группы Ли G. Тогда G действует также на кокасательном расслоении T^*X (посредством $g \mapsto \widetilde{g}$). Симплектическая форма ω на T^*X является G-инвариантной (кто не верит, пусть проверит). Положим $H_\xi = H_{\xi_*}$ (где последняя функция определена в пункте 1.1). Выполнение условий (H1),(H2) было проверено в пункте 1.1. Таким образом, действие $G : T^*X$ является гамильтоновым. Отображение моментов задается формулой

$$\langle \mu(x, \beta), \xi\rangle = \langle \xi_* x, \beta\rangle, \xi \in \mathfrak{g}, x \in X, \beta \in T^*_x X. \tag{2.11}$$

Следующее упражнение поможет прояснить происхождение термина "отображение моментов".

Упражнение 3. (для читателя, обремененного познаниями в механике)

Рассмотрим естественное действие $\mathrm{SO}(3) : \mathbb{S}^2$. Где Вам встречалось отображение моментов $\mu : T^*\mathbb{S}^2 \to \mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$?

Пример 16. *Линейные симплектические действия.* Пусть V — симплектическое векторное пространство с формой ω (п.2.1 лекции 1). Группа $\mathrm{Sp}(V)$ действует на V, сохраняя симплектическую форму (по самому своему определению). Для $\xi \in \mathfrak{sp}(V), v \in V$ положим

$$H_\xi(v) = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v). \tag{2.12}$$

Проверим, что отображение $\xi \mapsto H_\xi$ (очевидно, линейное) удовлетворяет условиям (H1),(H2). Для $u, v \in V, \xi \in \mathfrak{sp}(V)$ имеем

$$\partial_u H_\xi(v) = [\text{дифференцирование квадратичной функции}] = \frac{1}{2}(\omega(\xi u, v) + \omega(\xi v, u)) =$$
$$= [\text{определение } \mathfrak{sp}(V)] = \frac{1}{2}(-\omega(u, \xi v) + \omega(\xi v, u)) = \omega(\xi v, u),$$

что доказывает (2). Для доказательства (H2) заметим, что для $g \in \mathrm{Sp}(V)$

$$g_* H_\xi(v) = H_\xi(g^{-1}v) = \omega(\xi g^{-1} v, g^{-1} v) = [\text{инвариантность } \omega] =$$
$$= \omega((g\xi g^{-1})v, v) = H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}(v).$$

Отображение моментов отправляет 0 в 0, а на $V \setminus \{0\}$ является двулистным накрытием на некоторую коприсоединенную орбиту (задача 8 лекции 1).

Теперь перейдем к конструкциям.

Пример 17. *Накрытие.* Пусть X — симплектическое многообразие с гамильтоновым действием группы G, Y — ещё одно G-многообразие с этальным (т.е. с биективным в каждой точке дифференциалом) G-эквивариантным отображением $\varphi : Y \to X$. Тогда многообразие Y естественным образом снабжается симплектической формой (п. 2.4 лекции 1). Если H_ξ^X — гамильтонианы для действия $G : X$, то функции $H_\xi^Y = \varphi^*(H_\xi^X)$ удовлетворяют условиям (H1),(H2) (проверьте). Таким образом, действие $G : Y$ снабжается естественной гамильтоновой структурой. Если μ^X, μ^Y — соответствующие отображения моментов, то $\mu^Y = \mu^X \circ \varphi$.

Пример 18. *Произведение.* Пусть X_1, X_2 — симплектические многообразия с гамильтоновыми действиями групп G_1, G_2. Обозначим через μ_1, μ_2 соответствующие отображения моментов. Многообразие $X_1 \times X_2$ является симплектическим (пункт 2.4 лекции 1). Отображение $\mu_1 \times \mu_2 : X_1 \times X_2 \to \mathfrak{g}_1^* \times \mathfrak{g}_2^* = (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)^*$ удовлетворяет условиям (M1),(M2). Таким образом, действие $G_1 \times G_2$ становится гамильтоновым.

Пример 19. *Подмногообразие.* Пусть X — симплектическое многообразие с гамильтоновым действием группы G, а Y — симплектическое подмногообразие в X (см. п.2.4 лекции 1), устойчивое относительно действия группы G. Пусть H_ξ — гамильтонианы для действия $G : X$. Тогда ограничения $H_\xi|_Y$ удовлетворяют условиям (H1),(H2). Действительно, по пункту 1.2 для $y \in Y$ вектор $v(H_\xi|_Y)_y$ является проекцией вектора $v(H_\xi)_x = \xi_* y$ на $T_y Y$. Но из G-инвариантности подмногообразия Y следует, что $\xi_* y \in Y$. Это дает (H1). Выполнение условия (H2) очевидно. Отображение моментов для действия $G : Y$ совпадает с ограничением отображения моментов для действия $G : X$.

Пример 20. *Ограничение на подгруппу.* Пусть X — симплектическое многообразие, снабженное гамильтоновым действием группы G, и H — подгруппа Ли в G. Действие $H : X$ является гамильтоновым с гамильтонианами $H_\xi, \xi \in \mathfrak{h}$. Отображением моментов является композиция отображения моментов для действия $G : X$ и естественной проекции $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$.

Последний пример допускает несколько "специализаций". Во-первых, любое симплектическое линейное действие $H : V$ является гамильтоновым. Гамильтонианы задаются по формулам (2.12).

Во-вторых, если $X_1, \ldots, X_k$ — гамильтоновы G-многообразия с отображениями моментов $\mu_1, \ldots, \mu_k$, то $\prod_i X_i$ является гамильтоновым многообразием с отображением моментов $\mu_1 + \ldots + \mu_k$ (здесь рассматривается диагональное вложение G в $G \times G \times \ldots \times G$).

Специализируем последний пример ещё дальше. Положим $G = \mathrm{U}(n)$. В этом случае мы можем отождествить $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$ посредством инвариантного скалярного произведения $(X, Y) = -\operatorname{tr}(XY)$ и рассматривать присоединенные орбиты (т.е. классы сопряженности матриц) как коприсоединенные. Пусть $X_1, \ldots, X_k$ — присоединенные $\mathrm{U}(n)$-орбиты. Тогда $X_1 \times \ldots \times X_k$ — симплектическое многообразие, а диагональное действие $G : X$ является гамильтоновым. Отображение моментов также может рассматриваться как отображение в $\mathfrak{g}$, и в этом случае оно задается формулой $(A_1, \ldots, A_k) \mapsto A_1 + \ldots + A_k$. Задача описания образа этого отображения моментов называется "проблемой Хорна". Относительно популярный обзор по поводу проблемы Хорна (решенной Клячко в 90-ые годы) и связанных с ней вещей дан в [1].

3. Комментарии по поводу литературы

Отображение моментов, в той или иной степени подробности, изучается во всех (известных автору) учебниках по симплектической геометрии (см. лекцию 1). Классическим источником для ссылок по отображению моментов является [2]. Эта книга содержит также описание приложений к задачам математической физики.

Литература

[1] W. Fulton. Eigenvalues, invariant factors, heighest weights and Shubert calculus// Bull. of the AMS, v.37(2000), n.3, p. 209-249.

[2] V. Guillemin, S. Sternberg. Symplectic techniques in physics. Cambridge University Press, 1984.