ЛЕКЦИЯ 4

Содержание

1. Теоремы существования и единственности для гамильтоновых действий

Пусть задано действие симплектическое действие группы Ли G на симплектическом многообразии X. Нас интересуют два вопроса:

1) Указать (более или менее проверяемые) условия, при которых действие $G : X$ наделяется гамильтоновой структурой, т.е. существует отображение моментов $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$, удовлетворяющее условиям (M1),(M2) из п.2.2 предыдущей лекции.

2) Если действие $G : X$ снабжается гамильтоновой структурой, то насколько она единственна. Иными словами, как по заданному отображению моментов μ описать все отображения $\mu^1 : X \to \mathfrak{g}^*$, удовлетворяющие (M1),(M2).

На протяжении всего раздела мы считаем, что многообразие X связно. Мы начнем с ответа на второй, существенно более простой, вопрос.

1.1. Теорема единственности для гамильтоновых действий.

Предложение 1. *Пусть X — симплектическое многообразие, а G — группа, гамильтоново действующая на X с отображением моментов μ. Тогда отображение моментов $\mu^1 : X \to \mathfrak{g}$ удовлетворяет условиям (M1),(M2) тогда и только тогда, когда $\mu^1 - \mu$ — постоянное отображение, принимающее значение в $\mathfrak{g}^{*G}$.*

Доказательство. Выполнение условия (M1) для μ^1 означает, что $d_x\mu^1 = d_x\mu$ для всех $x \in X$. Поэтому μ^1 удовлетворяет (M1) тогда и только тогда, когда $\mu^1 - \mu : X \to \mathfrak{g}^*$ — постоянное отображение, пусть α — его значение. Если последнее условие выполнено то G-эквивариантность отображения μ^1 (условие (M2)) эквивалентно эквивариантности отображения $x \mapsto \alpha$, т.е. тому что $\alpha \in \mathfrak{g}^{*G}$. □

Например, если $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то $\mathfrak{g}^{*G^\circ} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^0 = 0$, и, стало быть, отображение моментов единственно, если существует. Отметим, что для элементов вида $[\xi, \eta]$ значение $\langle \mu(x), [\xi, \eta] \rangle$ задается явно, а именно равенством (2.9) предыдущей лекции.

1.2. **Теорема существования для гамильтоновых действий.** Этот вопрос является значительно более тонким.

Сначала мы обсудим условия, из которых вытекает (M1). Условие (M1) эквивалентно существованию функций $H_\xi, \xi \in \mathfrak{g}$ таких, что $v(H_\xi) = \xi_*$ (из доказательства эквивалентности условий (H1) и (M1) в предыдущей лекции), т.е. тому, что векторные поля скоростей являются гамильтоновыми.

Предложение 2. *Пусть $H^1_{DR}(X) = 0$ или $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Тогда $\xi_* \in \mathcal{V}ect(X)_h$.*

Доказательство. Поскольку действие $G : X$ является симплектическим, то $\xi_* \in \mathcal{V}ect(X)_s$. Если $H^1_{DR}(X) = 0$, то $\mathcal{V}ect(X)_s = \mathcal{V}ect(X)_h$ (лемма 11 лекции 2). Далее, если $\xi \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то $\xi_* \in [\mathfrak{g}_*, \mathfrak{g}_*] \subset [\mathcal{V}ect(X)_s, \mathcal{V}ect(X)_s] \subset \mathcal{V}ect(X)_h$. Последнее включение имеет место по лемме 12 лекции 2. □

С этого момента и до конца пункта мы считаем, что все векторные поля скоростей $\xi_*, \xi \in \mathfrak{g}$, являются гамильтоновыми.

Итак, мы имеем функции $\widetilde{H}_\xi \in C^\infty(X)$ с $v(\widetilde{H}_\xi) = \xi_*$. Можем считать, см. обсуждение в начале пункта 2.1 лекции 3, что отображение $\xi \mapsto H_\xi$ линейно. Мы хотим, чтобы выполнялось условие (H2) из пункта 2.1 лекции 3, т.е. чтобы $g_*\widetilde{H}_\xi = \widetilde{H}_{\mathrm{Ad}(g)\xi}$ для всех $\xi \in \mathfrak{g}, g \in G$. Мы же знаем, что $g_*\widetilde{H}_\xi - \widetilde{H}_{\mathrm{Ad}(g)\xi}$, суть постоянные функции. Таким образом, требуется ответить на следующий вопрос:

Можно ли по функциям $\widetilde{H}_\xi$ с $v(\widetilde{H}_\xi) = \xi_*$ найти константы a_ξ, линейно зависящие от ξ и такие, что функции $H_\xi = \widetilde{H}_\xi + a_\xi$ удовлетворяют условию

$$g_*H_\xi = H_{\mathrm{Ad}(g)\xi}. \tag{1.1}$$

Поскольку в случае связной группы G условия (H2) и (H2') эквивалентны, то в этом случае условие (1.1) можно переписать в виде

$$\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi,\eta]}, \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}. \tag{1.2}$$

Отметим, что функции $\{\widetilde{H}_\xi, \widetilde{H}_\eta\} - \widetilde{H}_{[\xi,\eta]}$ постоянны.

Сначала мы займемся нахождением условий, которые обеспечивают выполнение (1.2). При этом будем предполагать, что действие $G : X$ локально эффективно. Это эквивалентно тому, что отображение $\mathfrak{g} \to \mathcal{V}ect(X), \xi \mapsto \xi_*$ является вложением.

Фиксируем некоторый набор функций $\widetilde{H}_\xi$ с $v(\widetilde{H}_\xi) = \xi_*$ и линейным отображением $\xi \mapsto \widetilde{H}_\xi$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{g}}$ подпространство в $C^\infty(X)$, порожденное элементами $\widetilde{H}_\xi$ с $\xi \in \mathfrak{g}$ и 1. Поскольку $\{\widetilde{H}_\xi, \widetilde{H}_\eta\} - \widetilde{H}_{[\xi,\eta]} = const$, то $\widetilde{\mathfrak{g}}$ — подалгебра Ли в $C^\infty(X)$. Отображение $f \mapsto v(f)$ осуществляет эпиморфизм алгебр Ли $\widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ с ядром, состоящим из постоянных функций. Эта ситуация описывается следующим определением:

Определение 3. Точная последовательность алгебр Ли $0 \to \mathbb{R} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$ называется *одномерным центральным расширением* алгебры $\mathfrak{g}$, если $\mathbb{R} \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ является центральным идеалом. Одномерное центральное расширение называется *расщепимым*, если существует вложение $\mathfrak{g} \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ (расщепление), являющееся сечением проекции $\widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$.

Если σ расщепление центрального расширения $0 \to \mathbb{R} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$, то отображение $\mathfrak{g} \times \mathbb{R} \to \widetilde{\mathfrak{g}}, (\xi, t) \mapsto \sigma(\xi) + t$ является изоморфизмом алгебр Ли.

Вернемся к нашему случаю. Если наше расширение $0 \to \mathbb{R} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$ расщепимо, и σ — расщепление, то можем положить $H_\xi = \sigma(\xi)$.

Существует определенное количество алгебр Ли, для которых любое одномерное центральное расширение тривиально. Наиболее важным классом являются конечномерные полупростые алгебры Ли.

Предложение 4. *Любое одномерное центральное расширение конечномерной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ расщепимо.*

Доказательство. Пусть $0 \to \mathbb{R} \to \widetilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$ — одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$. Определим представление φ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $\widetilde{\mathfrak{g}}$ формулой $\varphi(\xi)\widetilde{\eta} = [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]$. Здесь $\xi \in \mathfrak{g}, \widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$, а через $\widetilde{\xi}$ обозначен элемент из $\widetilde{\mathfrak{g}}$, проектирующийся в ξ. Несложно видеть (проверьте), что определение корректно. Поскольку $\mathbb{R} \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ — центральный идеал в $\widetilde{\mathfrak{g}}$, то $\operatorname{ad}\widetilde{\mathfrak{g}} = \varphi(\mathfrak{g})$, и $\mathbb{R}$ — подпространство, устойчивое относительно представления φ. По теореме Вейля о полной приводимости конечномерных представлений полупростых алгебр Ли, см., скажем, [1], гл.1, §5, найдется подпространство $\mathfrak{g}_0$ в $\widetilde{\mathfrak{g}}$, дополняющее $\mathbb{R}$ и устойчивое относительно $\varphi(\mathfrak{g})$. Подпространство $\mathfrak{g}_0$ является идеалом в $\widetilde{\mathfrak{g}}$, изоморфно проектирующимся на $\mathfrak{g}$. В качестве расщепления надо взять изоморфизм $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$. □

Задача 1. Придумайте другие примеры конечномерных алгебр Ли, для которых не существует нетривиальных центральных расширений (одномерную алгебру не предлагать).

Таким образом, получаем следующее

Предложение 5. *Если группа G связна и полупроста, то каждое симплектическое действие группы G является гамильтоновым с однозначно определенным отображением моментов.*

Доказательство. Во-первых, любой фактор связной полупростой группы Ли снова является связным и полупростым. Поэтому можем считать, что интересующее нас действие эффективно. Теперь все следует из того, что $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и предложения 4. □

Теперь мы обсудим ещё один случай, когда можно добиться выполнения условия 1.1. Это случай компактной группы G. В этом случае удобнее рассматривать отображения $X \to \mathfrak{g}^*$. Именно, мы покажем, что если найдется некоторое отображение $\widetilde{\mu} : X \to \mathfrak{g}^*$, удовлетворяющее условию (M1), то найдется и G-эквивариантное отображение $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$, удовлетворяющее этому свойству. Идея состоит в том, чтобы усреднить отображение $\widetilde{\mu}$ по группе G.

Сначала докажем лемму

Лемма 6. *Пусть отображение $\widetilde{\mu} : X \to \mathfrak{g}^*$ удовлетворяет условию (M1). Тогда и отображение $\widetilde{\mu}^g, g \in G$, заданное равенством $\widetilde{\mu}^g(x) = \operatorname{Ad}^*(g)^{-1}\widetilde{\mu}(gx)$ удовлетворяет условию (M1).*

Доказательство. Для всех $x \in X, v \in T_xX, \xi \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned}&\langle d_x\widetilde{\mu}^g(v), \xi\rangle = [\text{ дифференциал композиции}] = \langle \operatorname{Ad}^*(g)^{-1} d_{gx}\mu(g_*v), \xi\rangle = \\ &= \langle d_{gx}\widetilde{\mu}(g_*v), \operatorname{Ad}(g)\xi\rangle = [(M1) \text{ для } \widetilde{\mu}] = \omega_{gx}((\operatorname{Ad}(g)\xi)_*, g_*v) = [G\text{-инвариантность } \omega] = \\ &= \omega_x(\xi_*x, v).\end{aligned}$$

□

Лемма 7. *Пусть G — компактная группа размерности n. Тогда можно выбрать инвариантную ориентацию на всех её компонентах и правоинвариантную n-форму Θ на G с $\int_G \Theta = 1$.*

Доказательство. Выберем форму $\theta \in \bigwedge^n T_e^*G$ и разнесем её правыми сдвигами на G. Обозначим разнесение через Θ. Это форма нигде не обращается в 0, потому является ориентирующей. В соответствующей ориентации $\int_G \Theta > 0$. Заменив Θ на $\Theta / \int_G \Theta$, получим требуемое. □

Теперь опишем собственно процедуру усреднения.

Предложение 8. *Пусть X — некоторое многообразие с действием группы G, φ — представление группы G в векторном пространстве V, а ψ — гладкое отображение*

$X \to V$. Обозначим через φ^g отображение из X в V, задаваемое по правилу $\varphi^g(x) = \psi(g)^{-1}\psi(gx)$. Тогда отображение $\psi^\natural : X \to V$, заданное формулой

$$\psi^\natural(x) = \int_G \psi^g(x)\Theta,$$

является G-эквивариантным.

Доказательство. Это следует из следующей цепочки равенств для $x \in X, h \in G$ (через h^r обозначен правый сдвиг $g \mapsto gh^{-1}$)

$$\varphi(h)\int_G \psi^g(x)\Theta = [\text{линейность интеграла}] = \int_G \varphi(h)\psi^g(x)\Theta =$$
$$= \int_G \varphi(hg^{-1})\psi(gx)\Theta = \int_G \psi^{gh^{-1}}(hx)\Theta = [\text{ инвариантность } \int$$
$$\text{относительно диффеоморфизмов}] = \int_G (h^r)^{-1}_*(\psi^{gh^{-1}}\psi(hx)\Theta) =$$
$$= [\text{инвариантность } \Theta] = \int_G (h^r)^{-1}_*(\psi^{gh^{-1}}\psi(hx))\Theta = \int_G \psi^g(hx)\Theta.$$

□

Следующая задача посвящена обобщению предыдущего результата.

Задача 2. Пусть G — компактная группа Ли, X — гладкое многообразие с действием группы G, а $\pi : E \to X$ — векторное расслоение. Расслоение E называется *G-расслоением*, если задано послойно-линейное действие $G : E$, для которого проекция π является G-эквивариантным отображением. Имеем действие $g \mapsto g_*$ группы G на пространстве сечений $\Gamma(X, E)$. Покажите, что для произвольного $\sigma \in \Gamma(X, E)$

$$\sigma^\natural_x := \int_G (g_*\sigma)_x\Theta, x \in X,$$

является G-инвариантным сечением расслоения E.

Нам остается показать, что для отображения $\widetilde{\mu} : X \to \mathfrak{g}^*$, удовлетворяющего условию (M1), отображение $\mu = \widetilde{\mu}^\natural$ также удовлетворяет этому условию. Будучи интегралом по вероятностной мере, $\widetilde{\mu}^\natural$ является пределом сумм вида $\alpha_1\widetilde{\mu}^{g_1} + \ldots + \alpha_k\widetilde{\mu}^{g_k}$ с $k \to +\infty, \alpha_i > 0, \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$. Для каждой суммы указанного вида условие (M1) выполняется (непосредственная проверка с использованием леммы 6), а значит оно выполняется и для предела.

Упражнение 3. Пусть произвольная группа Ли G с конечным числом связных компонент действует симплектически на многообразии X. Предположим, что действие $G^\circ : X$ снабжается гамильтоновой структурой. Тогда то же верно для действия $G : X$.

Суммируем полученные результаты

Теорема 9. *Пусть G — группа Ли, симплектически действующая на многообразии X. Предположим, что выполняются следующие условия:*

(1) $H^1_{DR}(X) = \{0\}$ *или* $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
(2) *Группа G полупроста и имеет конечное число связных компонент или компактна.*

Тогда действие $G : X$ снабжается гамильтоновой структурой.

2. Гамильтоновы действия на однородных пространствах

В этом разделе мы полностью опишем гамильтоновы групп Ли на однородных пространствах.

Один пример таких действий у нас уже есть. Это действия на коприсоединенных орбитах (п. 2.3 лекции 3, пример 14). Кроме того, мы имеем гамильтоновы действия на накрытиях коприсоединенных орбит. Подробнее, пусть $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ и H — подгруппа в G, лежащая между G_α и $(G_\alpha)^\circ$. Имеем накрытие $G/H \to G/G_\alpha$, которое определяет (см. пример 17 лекции 3) структуру гамильтонова действия для $G : G/H$, при котором отображение $G/H \to G\alpha$ является отображением моментов. Следующее предложение говорит о том, что все гамильтоновы действия на однородных пространствах получаются таким образом.

Предложение 10. *Пусть действие $G : X = G/H$ гамильтоново. Тогда $\mu(G/H)$ является одной орбитой, отображение $\mu : G/H \to \mu(G/H)$ — накрытием, причем симплектическая структура на G/H и структура гамильтоново действия индуцируются этим накрытием.*

Доказательство. $\mu(G/H) = G\mu(eH)$. Поэтому дифференциал отображения μ сюръективен в каждой точке. Следствие 13 предыдущей лекции переписывается в виде $\omega = \mu^*\omega^{KK}$, где ω — форма на X, а ω^{KK} — форма Костанта-Кириллова на $G\alpha$. Поэтому $\ker d_x\mu \subset \ker \omega_x$ для $x \in X$. Инъективность $d_x\mu$ следует из невырожденности формы ω. Все остальные утверждения теперь видны непосредственно. □

Пример 11. Пусть $G = \mathrm{U}(n+1), X = \mathbb{CP}^n$. Многообразие X является однородным пространством группы G, обладающим инвариантной симплектической формой — формой Фубини-Штуди. Многообразие X односвязно, а группа G компактна. Поэтому действие $G : X$ снабжается гамильтоновой структурой. Отображение моментов μ единственно с точностью до прибавления постоянного слагаемого из $\mathfrak{u}(n+1)^{*\,\mathrm{U}(n+1)} \cong (\mathfrak{u}(n+1)/\mathfrak{su}(n+1))^*$. Отождествим $\mathfrak{u}(n+1)$ с $\mathfrak{u}(n+1)^*$ посредством инвариантного скалярного произведения $(X,Y) = -\operatorname{tr}(XY)$. Можем рассматривать отображение моментов как отображение из X в $\mathfrak{g}$. Положим $x = [1 : 0 : \ldots : 0]$. Имеем $G_x = \mathrm{U}(1)\,\mathrm{U}(n)$. Поскольку отображение μ является G-эквивариантным, то $G_x \subset G_{\mu(x)}$. Отсюда следует, что $G_x = G_{\mu(x)}$ и что $x = diag((t_1+t_2)i, t_2 i, \ldots, t_2 i), t_1 \neq 0$. Можем считать, что $t_2 = 0$. Существует единственное G-эквивариантное отображение $\mu : X \to \mathfrak{g}$ с заданным $\mu(x)$. Это отображение задается формулой

$$[v] \mapsto [\xi \mapsto \frac{t_1\langle \xi v, v\rangle}{i\langle v, v\rangle}],$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть единственное с точностью до умножения на положительную константу $\mathrm{U}(n+1)$-инвариантное эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^{n+1}$. Таким образом, задача 3 лекции 2 заключается лишь в том, чтобы доказать равенство $t_1 = \frac{1}{2\pi}$.

3. (Локально) аналитические гамильтоновы действия. Ранг, коранг и дефект гамильтонова действия

3.1. **Аналитичность действия: зачем это требовать. Условие общности положения.** Действия групп на многообразиях может быть устроено весьма сложно. Они, однако, часто значительно упрощаются, если рассматривать не все точки, а только "наиболее невырожденные", "точки общего положения". В таких точках действие устроено более единообразно, и стало быть, более просто. При этом хочется, чтобы тех точек, которые мы отбрасываем было "мало".

Возникает проблема формализации понятия "точки общего положения". Для этого введем следующее

Определение 12. Пусть X — гладкое многообразие. Открытое подмножество $U \subset X$ будем называть *большим*, если $X \setminus U$ является локально-конечным объединением замкнутых подмногообразий в X. "Локальная конечность" означает, что для любого компактного подмножества $V \subset X$ только конечное число подмногообразий пересекает V.

Отметим, что пустое множество, согласно нашему определению, является большим!

Теперь можем дать следующее (не совсем формальное) определения точек общего положения.

Определение 13. Точки общего положения — это все точки некоторого (подходящего) непустого большого открытого подмножества.

Большое подмножество из предыдущего определения определяется некоторым условием невырожденности. Большинство условий "невырожденности" на точки, с которыми приходится иметь дело, выглядят как-то наподобие следующего: невырожденные точки суть те, в которых некоторая функция не обращается в 0. Однако гладкие функции плохи для такого определения: как известно, произвольное замкнутое подмножество есть множество нулей некоторой гладкой функции.

Поэтому гладкие объекты для определения точек общего положения нам не подходят.

Упражение 4. Приведите пример действия аддитивной группы $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$, которое нетривиально внутри единичного диска и тривиально вне.

Чтобы избавиться от таких патологий на действие нужно наложить условие аналитичности (т.е. того, чтобы многообразие X и действие $G : X$ были (вещественно) аналитическими, или, говоря неформально, чтобы "все" задавалось рядами) или некоторых его ослаблений. Возможно такое ослабление:

Определение 14. Действие $G : X$ называется *локально аналитическим*, если у каждой точки $x \in X$ существует открытая G-инвариантная окрестность U, которая снабжается структурой вещественно-аналитического многообразия, так чтобы действие $G : U$ было аналитическим.

Мы увидим в одной из следующих лекций, что любое действие компактной группы является локально аналитическим.

Теперь объясним зачем нам нужны условия типа аналитичности. Дело в том, что множество нулей аналитической функции всегда является большим. Аналогично большими и открытыми являются следующие множества:

1) Множество точек $x \in X$, в которых независимы значения аналитических сечений $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ некоторого аналитического векторного расслоения.

2) Множество точек $x \in X$, для которых независимы векторы $d_x\varphi(\xi_1), \ldots, d_x\varphi(\xi_n)$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — аналитические векторные поля, а φ — аналитическое отображение.

Аналогичные утверждение имеют место, если заменить аналитичность на локальную аналитичность (дайте соответствующие определения).

В качестве иллюстрации докажем следующее утверждение

Лемма 15. *Пусть $G : X$ — (локально) аналитическое действие. Тогда множество X^0 точек $x \in X$ с $\dim Gx = \max_{y \in X} Gy$ является большим открытым.*

Доказательство. Выберем базис $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathfrak{g}$. Условие $\dim Gx = m$ для некоторого натурального числа m эквивалентно тому, что система векторов $\xi_{1*}x, \ldots, \xi_{n*}x$ имеет ранг m. Таким образом, $x \in X^0$ тогда и только тогда когда система векторов $\xi_{1*}x, \ldots, \xi_{n*}x$ имеет максимально возможный ранг. Нетрудно видеть, что множество всех таких точек является большим открытым. $\square$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим (не общепринятым) обозначением $m_G(X) = \max_{x \in X} \dim Gx$.

3.2. **Ранг, коранг и дефект гамильтоновых действий.** В этом пункте многообразие X предполагается симплектическим, а действие $G : X$ гамильтоновым. Форма ω на X, действие $G : X$ и отображение моментов μ предполагается локально аналитическими. Ниже мы увидим, что для компактной группы G эти требование излишни.

Упражнение 5. Докажите, что подмножество X^0 в X, состоящее из всех точек x с $\dim Gx = m_G(X), \operatorname{rk}\omega|_{Gx} = \max_{y\in X}\operatorname{rk}\omega|_{Gy}$ является большим, открытым и непустым.

Рангом гамильтонова G-многообразия X называется число $\operatorname{rk}_G(X) = \operatorname{rk}\omega|_{Gx}$ с $x \in X^0$, где множество X^0 определено в предыдущем упражнении. Иными словами, ранг гамильтонова действия есть ранг ограничения симплектической формы на касательное пространство к орбите общего положения.

Упражнение 6. $\operatorname{rk}_G(X) = \max_{x\in X}\dim G\mu(x)$.

Дефектом действия $G : X$ называется число $\operatorname{def}_G(X) = \mathfrak{m}_G(X) - \operatorname{rk}_G(X)$. По другому, дефект действия — это размерность ядра ограничения симплектической формы на касательное пространство к орбите общего положения.

Коранг действия $G : X$ — это число $\operatorname{cork}_G(X) = \dim X - m_G(X) - \operatorname{def}_G(X)$. Иными словами, $\operatorname{cork}_G(X)$ — это ранг ограничения симплектической формы на ортогональное дополнение к касательному пространству орбиты общего положения.

Отметим, что $\operatorname{rk}_G(X)$ и $\operatorname{cork}_G(X)$ — четные числа.

Имеем следующие "крайние" случаи: $\operatorname{rk}_G(X) = 0, \operatorname{def}_G(X) = 0, \operatorname{cork}_G(X) = 0$. Оказывается, что интересным среди них является лишь один, а именно, последний. Действия $G : X$ с $\operatorname{cork}_G(X) = 0$ называются *коизотропными*. Это название дано потому, что условие $\operatorname{cork}_G(X) = 0$ эквивалентно коизотропности орбиты общего положения как подмногообразия симплектического многообразия (см. п.2.4 лекции 1 по поводу определения).

Упражнение 7. Докажите, что $\operatorname{rk}_G(X) = 0$ тогда и только тогда, когда ограничение действия $G : X$ на (G, G) тривиально.

Следующая задача описывает некоторые свойства коизотропных действий

Задача 8. (1) Покажите, что $C^\infty(X)^G$ является пуассоновой подалгеброй в $C^\infty(X)$.
(2) Покажите, что $v(f)_x \in (\mathfrak{g}_* x)^\perp$ для $f \in C^\infty(X)^G$ и всех $x \in X$.
(3) Покажите, что если действие $G : X$ коизотропно, то алгебра $C^\infty(X)^G$ коммутативна относительно скобки.

4. О чем же этот спецкурс, или развернутый комментарий по поводу литературы

Произвольные гамильтоновы действия изучать не интересно, да и невозможно. В нашем курсе мы остановимся на случае действий компактных групп. Вопросы которые мы рассмотрим можно разделить на два класса: "локальные" и "глобальные".

Локальные вопросы — это вопрос об описании гамильтонова действия (т.е. непосредственно самого действия, симплектической формы и отображения моментов) в некоторой инвариантной окрестности некоторой точки x. Планируется изложить два результата такого рода, оба принадлежат Гийемину и Стернбергу, см. [2].

Первый результат носит название теоремы о локальном сечении (local cross-section theorem). Он не описывает действие, а лишь упрощает его на некотором большом открытом подмножестве. Грубо говоря, смысл этой теоремы в том, что она позволяет считать, что заданная точка бьет в 0 при отображении моментов.

Второй результат, теорема о симплектическом слайсе, описывает действие настолько явно, насколько это вообще возможно, но только лишь в достаточно малой окрестности точки (ср. теорему о трубчатой окрестности из теории гладких многообразий).

Расправившись с локальной частью, мы перейдем к глобальной. Вопросы, которые будут рассмотрены, это строение слоев и образа отображения моментов.

Подобные результаты существуют для многих классов гамильтоновых многообразий, см. [3],[4],[5] по этому поводу. Мы остановимся на первом (в хронологическом порядке, 80-ые годы) исследованном и самом важном классе многообразий — на компактных. Следующий результат в полной общности был доказан Кирван, [6].

Для того, чтобы сформулировать эту теорему нам потребуется ввести некоторое новое отображение. Рассмотрим некоторую картановскую (=максимальную коммутативную) подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ и камеру Вейля $C \subset \mathfrak{t}$. В случае $G = \mathrm{U}(n)$ в качестве $\mathfrak{t}$ можно взять подалгебру диагональных матриц, а в качестве C — конус $\{diag(ix_1, \ldots, ix_n)|x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n\}$. Любая орбита $Gx, x \in \mathfrak{g}$ пересекает C в единственной точке. Ввиду наличия на $\mathfrak{g}$ инвариантного скалярного умножения $(\cdot, \cdot)$, мы можем отождествить $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$. Рассмотрим отображение $\psi : X \to C$, $x \mapsto Gx \cap C$. Это некоторое непрерывное отображение.

Теорема 16. *Образ отображения ψ является выпуклым многогранником, а его слои связны.*

Ввиду G-инвариантности $\operatorname{im}\mu$, последний образ однозначно восстанавливается по $\operatorname{im}\psi$ однозначно. Кроме того, связность слоев для ψ влечет то же свойство для μ.

Статья Кирван невелика (всего 5 страниц). Однако изложение опирается на её же книгу [7], содержащую некоторую обширную специально разработанную теорию. Поясним, насколько это возможно, идеологию Кирван. Рассмотрим гладкое отображение $f : X \to \mathbb{R}, f(x) = (\mu(x), \mu(x))$. Один из основных результатов, полученных в [7] — это связность слоя $f^{-1}(\min_{x\in X} f(x))$. Отсюда уже несложно вывести связность произвольного слоя отображения ψ и выпуклость его образа. То, что образ отображения ψ является объединением выпуклых многогранников, было доказано Гийеминым и Стернбергом до этого.

Метод доказательства связности указанного слоя состоит в применении методов теории Морса к функции f. Функция f не является функцией Морса в обычном смысле (попробуйте привести пример), однако достаточно хороша (minimally-nondegenerate function в терминологии Кирван). За остальными подробностями и ещё некоторыми интересными и полезные результатами читатель отсылается к [7].

Мы пойдем другим путем. Именно, мы сузим ещё сильнее класс рассматриваемых многообразий. Именно, пусть $G(\mathbb{C})$ — комплексная редуктивная алгебраическая группа с компактной формой G (в случае $G = \mathrm{U}(n)$ таковой будет $G(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$). Предположим, что V — пространство представления группы $G(\mathbb{C})$. Рассмотрим вложенное проективное многообразие $X \subset \mathbb{P}(V)$, устойчивое относительно группы $G(\mathbb{C})$. Если многообразие X гладко, то действие $G : X$ гамильтоново с отображением моментов (из примеров 14,19,20 предыдущей лекции)

$$[v] \mapsto [\xi \mapsto \frac{\langle \xi v, v\rangle}{2\pi i\langle v, v\rangle}], [v] \in X, \tag{4.1}$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$, напомним, есть некоторое G-инвариантное эрмитово скалярное произведение на V. Если многообразие X не гладко, то о гамильтоновом действии (по крайней мере в нашем понимании) говорить нельзя. Однако формула (4.1) все ещё имеет смысл.

Следующая теорема была доказана Мамфордом в приложении к статье [8].

Теорема 17. *$2\pi\psi(X)$ является выпуклым многогранником с рациональными вершинами.*

Метод доказательства Мамфорда состоит в следующем. Во-первых делается редукция к доказательству аналогичного утверждения только лишь для рациональны точек из $2\pi\psi(X)$ (скажем, для $G = \mathrm{U}(n)$ рациональные точки в C суть матрицы с коэффициентами из $i\mathbb{Q}$), а затем применяются методы геометрической теории инвариантов.

Связь между теорией инвариантов и гамильтоновыми действиями основывается на теореме Кемпфа-Несс, [9]. Мы сформулируем её здесь в несколько ослабленной форме.

Пусть V — комплексное представление группы $G(\mathbb{C})$. Можем рассмотреть категорный фактор $V//G(\mathbb{C}) := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V]^{G(\mathbb{C})})$ и морфизм факторизации $\pi : V \to V//G(\mathbb{C})$. Опять же, фиксировав G-инвариантное эрмитово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$, имеем гамильтоново действие $G : V$ с отображением моментов $\mu, v \mapsto [\xi \mapsto -\frac{1}{4i}\langle \xi v, v\rangle]$. Ограничение морфизма π на $\mu^{-1}(0)$, очевидно, G-инвариантно, поэтому пропускается через отображение $\mu^{-1}(0)/G \to V//G(\mathbb{C})$ (слева стоит обычный "топологический" фактор по действию компактной группы).

Теорема 18. *Отображение $\mu^{-1}(0)/G \to V//G(\mathbb{C})$ биективно.*

По модулю этой теоремы и т.н. численного критерия (полу)стабильности, принадлежащего самому Мамфорду (но разработанному, заметим, значительно раньше, в 60-ых) доказательство Мамфорда становится практически элементарным, хотя и весьма нетривиальным.

Мы не будем останавливаться на этом доказательстве. Вместо этого мы докажем уточнение теоремы 17 принадлежащее Бриону, [10].

Для формулировки его результата нам потребуется новое понятие — *многогранник Бриона*. Именно, рассмотрим однородное координатное кольцо $K_{hom}[X]$. Имеем представление группы $G(\mathbb{C})$ в однородной компоненте $K_m[X]$ степени m. Оно раскладывается в неприводимые, пусть $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \ldots, \alpha_{mn_m}$ — соответствующие старшие веса. Обозначим через $\mathrm{Br}(X)$ множество точек $\cup_m\{\frac{\alpha_1}{m}, \frac{\alpha_2}{m}, \ldots, \frac{\alpha_{n_m}}{m}\}$. Оно и называется многогранником Бриона. При этом под многогранником понимается многогранник в рациональном векторном пространстве $\mathfrak{t}(\mathbb{Q})$. На данный момент, однако, мы не сможем понять, что это именно многогранник. Впрочем, читатель может попытаться доказать выпуклость (как подмножества в $\mathfrak{t}(\mathbb{Q})$) уже сейчас.

Теорема Бриона выглядит следующим образом:

Теорема 19. $2\pi\mu(X) \cap \mathfrak{t}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Br}(X)$.

Если мы знаем, что подмножество рациональных точек в $2\pi\mu(X)$ плотно и что $\mathrm{Br}(X)$ действительно является рациональным многогранником, то тем самым мы доказали теорему 17.

Что касается связности слоев, то мы докажем (со ссылкой, впрочем, на некоторую теорему из алгебраической геометрии), что слой $\psi^{-1}(\alpha)$ связен для $\alpha \in \mathfrak{t}(\mathbb{Q})$.

Возникает задача описания многогранника $\mu(X)$ (называемого часто *многогранником моментов*, *moment polytope* по-английски). Здесь мы ограничимся простым результатом, принадлежащим Сйамару, [3], и легко вытекающим из нашей локальной теории. Этот результат обобщает известную теорему Атии [11], утверждающую, что для действия тора вершинами многогранника моментов являются образы при отображении $\mu = \psi$ неподвижных точек.

Хотелось бы привести некоторое применение теоремы Бриона. В качестве такого применения мы докажем теорему о связи коранга и дефекта для действия $G : X$ (или, точнее, для действия G на открытом подмножестве в X, состоящем из гладких точек) и таких важных в теории инвариантов численных характеристик $G(\mathbb{C})$-многообразий как ранг и дефект. Дадим определения. Выберем в $G(\mathbb{C})$ борелевскую подгруппу B (например, подгруппа верхне-треугольных матриц в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$) и максимальную унипотентную подгруппу U (например, подгруппа строго верхне-треугольных матриц в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$). Сложность, соответственно ранг, определяются формулами $c_{G(\mathbb{C})}(X) = \dim_{\mathbb{C}} X - m_B(X), rank_{G(\mathbb{C})}(X) = m_B(X) - m_U(X)$. **Предостережение:** не путайте ранг G-многообразия X и ранг $G(\mathbb{C})$-многообразия X, это совершенно разные вещи.

Связь между нашими характеристиками дается следующей теоремой:

Теорема 20. $\mathrm{def}_G(X) = \mathrm{rk}_{G(\mathbb{C})}(X), \mathrm{cork}_G(X) = 2c_{G(\mathbb{C})}(X)$.

Эта теорема может быть несложно выведена из результатов Д.И. Панюшева, [12]. Мы приведем альтернативное доказательство, использующее теорему Бриона и теорию стягиваний действий редуктивных групп, принадлежащую В.Л. Попову, [13].

Литература

[1] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. гл. 1-3. М.: Мир, 1974.

[2] V. Guillemin, S. Sternberg. Symplectic techniques in physics. Cambridge University Press, 1984.

[3] R. Sjamaar. Convexity properties of the moment mapping re-examined. Adv.Math 138(1998), p. 46-91. Также arXiv:math. dg-ga/9408001 v2.

[4] F. Knop. Weyl groups of Hamiltonian manifolds, I. Preprint (1997), arXiv:math. dg-ga/9712010.

[5] F. Knop. Convexity of Hamiltonian manifolds. Preprint (2001), arXiv:math.SG/0112144 v1.

[6] F.C. Kirwan. Convexity properties of the moment mapping III. Invent. Math. 77(1984), p.547-552.

[7] F.C. Kirwan. Cohomology of quotients in algebraic and symplectic geometry. Mathematical Notes, 131. Princeton Univ. Press, 1984.

[8] L. Ness. A stratification of the null-cone via the moment map. Amer. J. Math, 106(1984), p. 1281-1329.

[9] G. Kempf, L.Ness. The lengths of vectors in representation spaces. Lecture Notes Math., vol. 732, p. 233-244. Springer Verlag, 1979.

[10] M. Brion. Sur l'image l'application moment. Lecture Notes Math., vol. 1296, p. 177-192. Springer Verlag, 1987.

[11] M. Atiyah. Convexity and commuting hamiltonians. Bull. London Math. Soc., 14(1982), p. 1-15.

[12] D. Panyushev. Complexity and rank of homogeneous spaces. Geometria Dedicata, 34(1990), p. 249-269.

[13] В.Л. Попов. Стягивание действий редуктивных алгебраических групп. Мат. сб., 130(1986), N3, с. 310-334.