ЛЕКЦИЯ 5

Содержание

1. Компактные группы Ли

Этот раздел начинается с напоминания базовых вещей связанных с компактными группами. Это составляет содержание первых четырех пунктов. За доказательствами утверждений пп.1,3,4 читатель отсылается к [1].

1.1. **Представления компактных групп.**

Теорема 1. *Пусть V — вещественное (соотв., комплексное) представление компактной группы Ли G. Тогда на V существует инвариантное скалярное (соотв., эрмитово скалярное) произведение.*

Следствие 2. *Любое представление компактной группы Ли вполне приводимо.*

Следствие 3. *Образ элемента $g \in G$ (соотв. $\xi \in \mathfrak{g}$) при конечномерном представлении группы G является полупростым оператором, собственные значения которого по модулю равные 1 (соотв. чисто мнимые).*

Следствие 4. *На $\mathfrak{g}$ существует G-инвариантное скалярное умножение $(\cdot,\cdot)$.*

1.2. **Рациональная структура на касательной алгебре тора.** Пусть T — n-мерный тор, т.е. произведение n-экземпляров группы $\mathbb{S}^1$. Характер тора T — это гомоморфизм $T \to \S^1$. Множество характеров образует абелеву группу, которая обозначается через $\mathfrak{X}(T)$. Эта группа изоморфна $\mathbb{Z}^n$. Гомоморфизм $\varphi : T_1 \to T_2$ индуцирует гомоморфизм $\varphi^* : \mathfrak{X}(T_2) \to \mathfrak{X}(T_1)$ и обратно.

Отождествим характер $\chi \in \mathfrak{X}(T)$ с его дифференциалом $d_e\chi : \mathfrak{t} \to i\mathbb{R}$. Эта решетка определяет рациональную структуру на $\mathfrak{t}$, т.е. рациональное векторное пространство $\mathfrak{t}(\mathbb{Q})$ вместе с изоморфизмом $\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$. Именно,

$$\mathfrak{t}(\mathbb{Q}) = \{\xi \in \mathfrak{t} | \chi(\xi) \in i\mathbb{Q}, \forall \chi \in \mathfrak{X}(T)\}.$$

Отметим, что дифференциал любого гомоморфизма тора является рациональным отображением. В частности, любая подалгебра в $\mathfrak{t}$, отвечающая подтору в T, рациональна.

Упражнение 1. Докажите обратное утверждение.

1.3. **Структурная теория.** В этом разделе G — связная компактная группа Ли.

Предложение 5. *Все максимальные торы в G сопряжены. Их касательными подалгебрами являются в точности максимальные коммутативные подалгебры в $\mathfrak{g}$. В частности, последние сопряжены в G.*

Определение 6. Рангом компактной группы G называется размерность её максимального тора, обозначается $\mathrm{rk}(G)$.

Упражнение 2. В случае $G = \mathrm{U}(n)$ максимальным тором является группа всех диагональных матриц.

Фиксируем некоторый максимальный тор $T \subset G$ и его касательную алгебру $\mathfrak{t}$. По следствию 3, все операторы вида $\mathrm{ad}(\xi) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ имеют мнимые собственные значения. Чтобы получить собственные векторы, перейдем к комплексификации.

Упражнение 3. Комплексификация алгебры $\mathfrak{u}(n)$ естественно изоморфна $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

Для $\alpha \in \mathfrak{t}(\mathbb{C})^*$ положим

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha = \{\eta \in \mathfrak{g}(\mathbb{C}) | [\xi, \eta] = \alpha(\xi)\eta, \forall \xi \in \mathfrak{t}\}.$$

Имеем равенство

$$\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{t}(\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in i\mathfrak{t}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha.$$

Понятно, что множество всех α с $\mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha \neq 0$ конечно. Понятно также, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathbb{C})_{-\alpha}$ и что $\mathfrak{g}$ пересекает $\mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha \oplus \mathfrak{g}(\mathbb{C})_{-\alpha}$ по пространству размерности $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha$. Наконец, можно заметить, что $\mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha \neq \{0\}$ влечет $\alpha \in i\mathfrak{t}(\mathbb{Q})^*$.

Структуру множества векторов α с $\mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha \neq \{0\}$ описывает следующая теорема.

Теорема 7. *Положим $\Delta(G) = \{\alpha \in i\mathfrak{t}^* | \mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha \neq 0\}$.*

1. *Для всех $\alpha \in \Delta(G)$ имеет место равенство $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha = 1$.*
2. *Множество векторов $\Delta(G)$ образует приведенную систему корней в пространстве $i\mathfrak{t}^*$ (см. определение 8 ниже).*

Отметим для дальнейшего, что на пространстве $i\mathfrak{t}^*$ имеется скалярное произведение, индуцированное инвариантным скалярным произведением на $\mathfrak{g}$, взятым со знаком минус.

Дадим теперь определение приведенной системы корней.

Определение 8. Конечное множество векторов Δ в евклидовом векторном пространстве V называется *приведенной системой корней*, если выполняются следующие условия:

1. Для $\alpha \in \Delta$ включение $k\alpha \in \Delta$ с целым k эквивалентно тому, что $k = \pm 1$.
2. Для $\alpha, \beta \in \Delta$ число $(\alpha|\beta) = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ является целым.
3. Ортогональное отражение s_α относительно гиперплоскости, перпендикулярной α, оставляет на месте множество Δ. Отметим, что для $\xi \in V$ имеет место равенство $s_\alpha(\xi) = \xi - \frac{2(\alpha,\xi)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

Упражнение 4. В случае $G = \mathrm{U}(n)$ системой корней является множество $\{\varepsilon_i - \varepsilon_j, i, j = \overline{1,n}, i \neq j\}$, где ε_i — элемент из $i\mathfrak{t}^*$, заданный равенством $\varepsilon_i(diag(x_1, \ldots, x_n)) = x_i$. Это так называемая система корней типа A_{n-1}. Проверьте для неё свойства (1)-(3) из определения 8.

Определение 9. Пусть Δ — система корней в евклидовом пространстве V. Подгруппа $W \subset \mathrm{GL}(V, \mathbb{R})$, порожденная отражениями s_α с $\alpha \in \Delta$ называется группой Вейля системы корней Δ. В случае, когда Δ — система корней группы G, то говорят, что W — группа Вейля для G.

Теорема 10. *Группа Вейля для G совпадает с $N_G(\mathfrak{t})/T$.*

Упражнение 5. Проверьте двумя способами, что группой Вейля для $U(n)$ является группа подстановок S_n на $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Пусть Δ — некоторая система корней в пространстве V. Гиперплоскости $\ker_\alpha$ с $\alpha \in \Delta$ разбивает пространство V^* на связные компоненты. Их замыкания называются *камерами Вейля*, это некоторые полиэдральные конусы. Пусть C — одна из таких камер. Для любого корня $\alpha \in \Delta$ выполняется в точности одно из неравенств $\langle \alpha, C\rangle > 0$, $\langle \alpha, C\rangle > 0$. Корни, для которых выполнено первое неравенство, называются *положительными*, остальные *отрицательными*. Положительные корни, которые не представляются в виде суммы более двух положительных корней, называются *простыми*. Любой положительный (соотв. отрицательный) корень представляется в виде суммы простых корней с положительными (соотв. отрицательными) коэффициентами. Отметим, что группа Вейля естественным образом действует на множестве камер Вейля.

Теорема 11. (1) *Простые корни образуют базис в $\langle \Delta \rangle$.*

(2) *Группа Вейля действует на множестве камер Вейля просто транзитивно, причем любая камера является фундаментальной областью для этого действия, т.е. любая W-орбита пересекает камеру в единственной точке.*

(3) *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система положительных корней, построенная по C, то*

$$C = \{\xi \in V | \langle \alpha_i, \xi\rangle \geqslant 0\}.$$

(4) *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — такое линейно независимое подмножество в Δ, что любой корень является линейной комбинацией α_i с целыми коэффициентами одного знака. Тогда $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — система простых корней для некоторой однозначно определенной камеры Вейля. Эта камера Вейля называется положительной (для данного выбора системы $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$).*

Если $\Delta = \Delta(G)$, то удобнее считать, что камеры Вейля живут не в $i\mathfrak{t}$, а в $\mathfrak{t}$. При этом в предыдущих определениях надо α менять на α/i.

Упражнение 6. Пусть $G = \mathrm{U}(n)$. Тогда $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$ является системой простых корней. Соответствующая положительная камера Вейля есть $C = \{diag(ix_1, \ldots, ix_n), x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n\}$.

Наконец, сделаем следующее замечание. Поскольку любой элемент из $\mathfrak{g}$ содержится в некоторой, и, стало быть, в максимальной, коммутативной подалгебре, то он переводится в $\mathfrak{t}$ действием группы G.

Теорема 12. *Пусть элементы $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{t}$ — сопряжены под действием группы G. Тогда они сопряжены и под действием W. В частности, камера Вейля является фундаментальной областью для действия $G : \mathfrak{g}$.*

Упражнение 7. Для $\Delta = \Delta(G)$ количество элементов в любой системе простых корней равно $\mathrm{rk}(G, G)$.

1.4. **Подгруппы Леви.** *Подгруппой Леви* в G называется централизатор некоторого элемента из $\mathfrak{g}$.

Предложение 13. *Подгруппа Леви связна.*

Опишем касательную алгебру $\mathfrak{l}$ подгруппы Леви $L \subset G$. Пусть $L = Z_G(\xi)$. Фиксируем максимальную коммутативную подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$, систему положительных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ в ней и соответствующую положительную камеру Вейля C. Сопряжением переведем ξ в C. Пусть ξ лежит в *стенке* (т.е грани конуса C), равной

$C \cap (\ker \alpha_1 \cap \ldots \cap \ker \alpha_s)$. Обозначим через $\Delta(L)$ подмножество в $\Delta(G)$, состоящее из всех линейных комбинаций элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Тогда

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Delta(L)} \mathfrak{g}(\mathbb{C})_\alpha,$$

и $\Delta(L)$ является системой корней группы L с системой простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

Упражнение 8. Докажите это.

Упражнение 9. Всякая подгруппа Леви в $G = \mathrm{U}(n)$ сопряжена подгруппе блочных матриц $\mathrm{U}(n_1) \ldots \mathrm{U}(n_k)$ с $n_1 + \ldots + n_k = n$.

Замечание 14. Подгруппы Леви L_1, L_2, являющиеся централизаторами элементов из C могут быть сопряжены даже если $\Delta(L_1) \neq \Delta(L_2)$.

Упражнение 10. Приведите соответствующий пример.

2. Действия компактных групп

В первом пункте мы вводим важный класс многообразий с действием компактной группы, а именно, однородные расслоения. Их важность проявляется в пункте 2, где мы формулируем и доказываем один из важнейших результатов теории компактных групп преобразований — теорему о слайсе.

2.1. **Однородные расслоения.**

Однородные расслоения можно определить для любых групп Ли (совершенно аналогично тому, как это делается ниже), но нам они будут нужны только для компактных.

Итак, пусть G — компактная группа Ли, H — её замкнутая подгруппа Ли, Y — многообразие с действием группы H. Имеем действие группы H на $G \times Y$, $h.(g, y) = (gh^{-1}, hy)$, перестановочное с действием группы G умножениями слева на множителе G. Рассмотрим фактор (в топологическом смысле) $(G \times Y)/H$ и проекцию $\pi : G \times Y \to (G \times Y)/H$. На нем существует единственная структура гладкого многообразия, удовлетворяющая следующему условию:

Для открытого подмножества $U \subset X$ непрерывная функция f на U является гладкой тогда и только тогда, когда $\pi^*(f) \in C^\infty(\pi^{-1}(U))$.

При этом, отображение π является субмерсией (ср. с построением гладкой структуры на однородных пространствах в [1]). Точка $\pi(g, y) \in (G \times Y)/H$ обозначается через $[g, y]$. Отметим, что, по определению, $[gh^{-1}, hy] = [g, y]$.

На $(G \times Y)/H$ существует единственное (гладкое) действие группы G, для которого проекция π является G-эквивариантным отображением. Многообразие $(G \times Y)/H$ с таким действием группы G называется *однородным расслоением над G/H со слоем Y*. Поясним откуда берется название. Имеем естественное отображение $G *_H Y \to G/H$, $[g, y] \mapsto gH$. Можно показать, что это отображение является локально тривиальным расслоением со слоем F (и структурной группой H). В случае, когда Y является векторным пространством с линейным действием группы H, расслоение $G *_H Y$ над G/H является векторным G-расслоением (см. задачу 2 предыдущей лекции).

Задача 11. Пусть X — G-многообразие, Y — H-многообразие. Постройте естественное (т.е. функториальное по X и по Y) взаимно-однозначное соответствие между множествами $\mathrm{Mor}^G(G *_H Y, X)$ и $\mathrm{Mor}^H(Y, X)$ эквивариантных гладких отображений соответствующих многообразий.

Теперь мы опишем касательное пространство к точкам $G *_H Y$. В силу наличия действия группы G будет достаточно описать пространство $T_{[e,y]}(G *_H Y)$. Во-первых, подпространство $T_y Y$ естественным образом вложено в $T_{[e,y]}(G *_H Y)$ как касательное пространство к слою расслоения. Во-вторых, $\mathfrak{h}^\perp$ вкладывается в $T_{[e,y]}(G *_H Y)$ как

$\mathfrak{h}_*^\perp[e,y]$, при этом проекция на G/H индуцирует изоморфизм этого подпространства с $T_e(G/H)$. Таким образом, $T_{[e,y]}(G *_H Y) = T_yY \oplus \mathfrak{h}^\perp$. Отметим, что этот изоморфизм перестановочен с действием группы H.

Замечание 15. Все сказанное выше в этом пункте дословно переносится на аналитические многообразия и аналитические действия. В частности, действие $G : G *_H Y$ является аналитическим, если таковым было действие $H : Y$.

2.2. **Теорема о слайсе.** Теорема о слайсе является одним из важнейших инструментов исследования действий компактных групп, дающим локальное описание действия в окрестности заданной орбиты.

Пусть X — гладкое многообразие с действием компактной группы G, $x \in X$, $H = G_x$, $N = T_xX/\mathfrak{g}_*x$. Имеем естественное линейное действие $H : N$.

Теорема 16. *Существует некоторая H-инвариантная окрестность нуля в N и G-инвариантная окрестность U точки x в X, для которых G-многообразия U и $G *_H O$ изоморфны.*

Иными словами, любое действие в окрестности орбиты локально устроено как однородное векторное расслоение над этой орбитой.

Доказательство. Выберем G-инвариантную риманову метрику на X (существующую, в силу задачи 2 предыдущей лекции, поскольку существует какая-то риманова метрика). Этот выбор фиксирует H-инвариантное скалярное произведение на N и позволяет отождествить N с $\mathfrak{g}_*x^\perp$. Для некоторой H-инвариантной окрестности O_1 точки 0 в N задано геодезическое отображение $\exp_x : O_1 \to X$. Это отображение H-инвариантно, а его дифференциал есть вложение N в T_xX. Таким образом, получаем G-инвариантное отображение $\Phi : G *_H O_1 \to X, [g,v] \mapsto g\exp_x(v)$. Отметим, что $d_x\Phi$ есть ни что иное как отождествление $N \oplus \mathfrak{g}_*x \cong \mathfrak{g}_*x^\perp \oplus \mathfrak{g}_*x \cong T_xX$. Поэтому дифференциал отображения Φ является изоморфизмом во всех точках орбиты Gx (в силу G-эквивариантности). Уменьшая окрестность O_1, можем считать, что $d\Phi$ является изоморфизмом во всех точках из $G *_H O_1$, и что для некоторой достаточно малой окрестности O_2 точки eH в G/H ограничение Φ на $\pi^{-1}(O_2) \cong O_2 \times O_1 \subset G *_H V$, где $\pi : G *_H O \to G/H$ — естественная проекция, инъективно. Наконец, покажем что найдется число $d > 0$, для которого ограничение Φ на $G *_H O$ с $O = \{v \in N, |v| < d\}$ инъективно. От противного, для любого $d > 0$ найдутся $v_1, v_2 \in N, |v_1|, |v_2| < d, g_1, g_2 \in G$ с $[g_1, v_1] \neq [g_2, v_2]$ и $g_1\exp_x(v_1) = g_2\exp(v_2)$. Можем считать, что $g_1 = 1$. Тогда $g_2H \notin O_2$, и противоречие следует из равенства $g_2\exp_x(v_1) = \exp_{gx}(g_*v)$ и наглядных геометрических соображений. □

Замечание 17. В предыдущей теореме можно выбрать окрестность O очень специального вида, например шар достаточно малого радиуса относительно H-инвариантной метрики на N. В этом случае связные компоненты многообразия $G *_H O$ переставляются транзитивно группой G.

Теорема о слайсе имеет множество следствий приведем некоторые из них.

Следствие 18. *Действие $G : X$ локально аналитическое.*

Следствие 19. *Для всех точек y из некоторой инвариантной окрестности точки $x \in X$ найдется $g \in G$ с $gG_yg^{-1} \subset G_x$.*

Следствие 20. *Для $H \subset G$ подмножество $X^H \subset X$ является замкнутым подмногообразием.*

Доказательство. Замкнутость очевидна. Остается применить теорему о слайсе к точке $x \in X^H$ для действия $H : X$ и воспользоваться очевидным утверждением о том, что для линейного действия множество неподвижных точек является подпространством. □

В качестве более тонкого следствия теоремы о слайсе мы докажем существование стабилизатора общего положения для действия $G : X$. Сначала определение:

Определение 21. Подгруппа $G_0 \subset G$ называется стабилизатором общего положения для действия $G : X$, если для некоторого большого открытого подмножества $X^0 \subset X$ и любой точки $x \in X^0$ подгруппы G_x и G_0 сопряжены в G.

Предложение 22. *Пусть группа G транзитивно переставляет компоненты связности многообразия X. Тогда для действия $G : X$ существует стабилизатор общего положения.*

Доказательство. Сделаем несколько замечаний. Во-первых, мы всегда можем считать многообразие X связным перейдя от действия $G : X$ к действию $G_1 : X_1$, где X_1 — связная компонента в X, а G_1 — её стабилизатор в группе G. Во-вторых, мы будем доказывать несколько более сильное утверждение. А именно, мы докажем, что

(*) найдется некоторая подгруппа $G_0 \subset G$, для которой подмножество $X^0 \subset X$ состоящее из всех точек x со стабилизатором, сопряженным с G_0, будет большим (в смысле определения из предыдущей лекции) и открытым (и в силу своей инвариантности, будет пересекать все связные компоненты многообразия X).

Мы предположим, что для всех многообразий размерности меньшей $\dim X$ (для которых G транзитивно переставляет компоненты) утверждение (*) выполнено. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Случай действия $G : X$, где X есть однородное векторное расслоение, $X = G *_H V$. Очевидно, что выполнение условия (*) для действий $G : X$ и $H : V$ равносильно. По предположению на X, $G = H$. Если $\dim X = 1$, то утверждение очевидно (у всех ненулевых точек одинаковый стабилизатор). В противном случае выберем G-инвариантное скалярное произведение в X и рассмотрим единичную сферу Y в X. Для действия $G : Y$ утверждение (*) выполнено. Выполнение условия (*) для действия $G : X$ следует из того, что $X \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{>0}Y$.

Шаг 2. У любой точки $x \in X$ найдется G-инвариантная окрестность U, такая что группа G действует транзитивно на множестве связных компонент U, и действие $G : U$ удовлетворяет условию (*). Это следствие из теоремы о слайсе, замечания 17, и доказанного на предыдущем шаге.

Шаг 3. Для точки $x \in X$ обозначим через $G_0(x)$ стабилизатор общего положения для действия $G : U$, где окрестность U такая, как на предыдущем шаге. Это определение не зависит от выбора U. Положим $X(x) = \{y \in X | G_0(y), G_0(x) \text{ сопряжены}\}$. Из определения следует, что для вся окрестность U, выбранная при определении группы (а точнее класса сопряженности групп) $G_0(x)$, содержится в $X(x)$. Поэтому множество $X(x)$ открыто. Оно G-инвариантно, а потому пересекает все связные компоненты в X. Наконец, $X(x)$ замкнуто, ибо любая окрестность точки $y \in \overline{X(x)}$ пересекает $X(x)$. Отсюда следует, что $X(x) = X$. То, что множество X^0 будет большим и открытым следует из того факта, что найдется такое покрытие многообразия X открытыми G-инвариантными множествами U_i, что $X^0 \cap U_i$ — большое открытое подмножество в U_i (в качестве таковых можно взять окрестности, полученные на шаге 2). □

Следствие 23. *Стабилизатор каждой точки $x \in X$ содержит подгруппу, сопряженную стабилизатору общего положения.*

Доказательство. Применить теорему о слайсе к точке x. □

Литература

[1] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Мир, 1988.