ЛЕКЦИЯ 6

Содержание

1. Теорема о локальном сечении

В этом разделе G — связная компактная группа Ли, X — гамильтоново G-многообразие с симплектической формой ω и отображением моментов $\mu : X \to \mathfrak{g}$ (напомним, что пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ отождествлены с помощью G-инвариантного скалярного произведения на $\mathfrak{g}$).

Теорема, которую мы сейчас обсудим, позволяет свести произвольное гамильтоново действие в окрестности некоторой точки к действию, при котором образ этой точки становится центральным элементом.

1.1. Конструкция сечения.

Именно, пусть $x \in X, \xi = \mu(x)$. Мы хотим найти связную подгруппу $L \subset G$ и L-инвариантное подмногообразие $Y \subset X$, содержащее точку x и удовлетворяющее следующим условиям:

(a) Ограничение формы ω на Y невырождено. В этом случае действие $L : Y$ будет гамильтоновым с отображением моментов $\mu_L = p \circ \mu$, где $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}$ — ортогональная проекция.
(b) $\mu_L(x) = \mu(x) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$.
(c) Свойство быть сечением: отображение $G *_L Y \to X$ является открытым вложением.

Поскольку мы требуем $\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$, то в качестве группы L естественно взять подгруппу Леви $Z_G(\xi)$. Мы будем далее считать, что мы выбрали максимальную коммутативную подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ с $\xi \in \mathfrak{t}$ и такую систему простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что ξ лежит в соответствующей положительной камере Вейля C, и все простые корни, аннулирующие ξ, суть $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, s < r$. Мы выберем $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ в качестве системы положительных корней в $\mathfrak{l}$, пусть C_L — соответствующая положительная камера Вейля. Отметим, что $C \subset C_L$. Мы положим $\mathfrak{l}^{pr} = \{\eta \in \mathfrak{l} | \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\eta) \subset \mathfrak{l}\}$. Это L-инвариантное подмножество в $\mathfrak{l}$ с $\xi \in \mathfrak{l}^{pr}$.

Упражнение 1. Пусть $G = \mathrm{U}(5), \xi = diag(i, i, 0, -i, -i)$. Тогда $\mathfrak{l} = diag(A, b, C)$ с $A, C \in \mathfrak{u}(2), b \in i\mathbb{R}$. Множество $\mathfrak{l}^{pr}$ состоит из всех таких матриц $diag(A, b, C)$, для которых собственные значения матриц A, C отличны от b.

Следующая предложение характеризует свойства подмножества $\mathfrak{l}^{pr} \subset \mathfrak{l}$.

Предложение 1. *Подмножество $\mathfrak{l}^{pr} \subset \mathfrak{l}$ открыто. Его связная компонента, содержащая ξ, совпадает с $L(C \cap \mathfrak{l}^{pr})$.*

Доказательство. Нам потребуется следующая лемма, доказательство которой остается читателям.

Лемма 2. *Пусть компактная группа G (непрерывно) действует на (достаточно хорошем) топологическом пространстве X. Пусть Y — замкнутое подмножество в X. Тогда GY — замкнутое подмножество в X.*

В силу инвариантности подмножества $\mathfrak{l}^{pr} \subset \mathfrak{l}$ имеем равенства $\mathfrak{l} \setminus \mathfrak{l}^{pr} = L(C_L \setminus \mathfrak{l}^{pr}), \mathfrak{l} \setminus L(C \cap \mathfrak{l}^{pr}) = L(\mathfrak{l}^{pr} \cap C_L \setminus C)$. Заметим, что непосредственно из определений следует, что

$$C_L \cap \mathfrak{l}^{pr} = \{\xi \in C_L | \forall \alpha \in \Delta(G) \setminus \Delta(L), \langle \alpha, \xi \rangle \neq 0\}.$$
$$C \cap \mathfrak{l}^{pr} = \{\xi \in C_L | \langle \alpha_j / i, \xi \rangle > 0, j = \overline{s+1, r}\}.$$
$$C_L \cap \mathfrak{l}^{pr} \setminus C = \{\xi \in C_L \cap \mathfrak{l}^{pr} | \exists j \in \{s+1, \ldots, r\}, \langle \alpha_j / i, \xi \rangle < 0\}.$$

Таким образом, левые части предыдущих равенств — открытые подмножества в C_L. Таким образом, их дополнения замкнуты в C_L. Лемма 2 дает теперь, что $\mathfrak{l}/\mathfrak{l}^{pr} = L(C_L \setminus \mathfrak{l}^{pr})$ — замкнутое подмножество в $\mathfrak{l}$, а $L(C \cap \mathfrak{l}^{pr}), L(\mathfrak{l}^{pr} \cap C_L \setminus C) = \mathfrak{l}^{pr} \setminus L(C \cap \mathfrak{l}^{pr})$ — замкнутые подмножества в $\mathfrak{l}^{pr}$. Для полного доказательства предложения осталось заметить, что $\xi \in \mathfrak{l}^{pr} \cap C$, а пространство $C \cap \mathfrak{l}^{pr}$ связно. $\square$

В качестве Y мы возьмем $\mu^{-1}(L(C \cap \mathfrak{l}^{pr}))$. Следующее предложение дает, в частности, что Y — гладкое симплектическое подмногообразие размерности $\dim G - \dim L$.

Предложение 3. *Рассмотрим отображение φ — композицию μ и ортогональной проекции $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}^{\perp}$. Верны следующие утверждения*

(1) $Y \subset \varphi^{-1}(0)$.

(2) *Ограничение $d_y\varphi$ на $\mathfrak{l}^{\perp}_* y$ есть изоморфизм для всех $y \in Y$. В частности, отображение $\xi \mapsto \xi_* : \mathfrak{l}^{\perp} \to \mathfrak{l}^{\perp}_*$ биективно.*

(3) *Отображение φ субмерсивно в любой точке из Y, Y является подмногообразием, и $T_yY = \ker d_y\varphi$.*

(4) $T_yX = T_yY \oplus \mathfrak{l}^{\perp}_* y$ *— ортогональная прямая сумма.*

Доказательство. Пункт 1 следует из определения Y. Для доказательства пункта 2 достаточно доказать, что $d_y\varphi(\xi_* y) = 0 \Rightarrow \xi = 0$ для $y \in Y, \xi \in \mathfrak{l}^{\perp}$. Действительно, пусть $\eta \in \mathfrak{l}^{\perp}$. Тогда

$$(d_y\varphi(\xi_* y), \eta) = (p(d_y\mu(\xi_* y)), \eta) = (d_y\mu(\xi_* y), \eta) = [G\text{-эквивариантность } \mu] = ([\xi, \mu(y)], \eta).$$

Таким образом, если $d_y\varphi(\xi_* y) = 0$, то $([\xi, \mu(y)], \eta) = 0$ при всех $\eta \in \mathfrak{l}^{\perp}$, поэтому $[\xi, \mu(y)] \in \mathfrak{l}$. Но $\mu(y) \in \mathfrak{l}$, поэтому $[\mu(y), \xi] \in \mathfrak{l}^{\perp}$ (из $\mathfrak{l}$-инвариантности формы $(\cdot, \cdot)$). Таким образом, $\xi \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(y))$. Но, по определению Y, $\mu(y) \in \mathfrak{l}^{pr}$, иными словами, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(y)) = \mathfrak{l}$. Таким образом, $\xi = 0$, что и требовалось.

Субмерсивность отображения φ в точках из Y теперь очевидна. В окрестности любой своей точки y подмножество $Y \subset X$ совпадает с $\mu^{-1}(\mathfrak{l}) = \varphi^{-1}(0)$, ибо $\mathfrak{l}^{pr}$ — открытое подмножество в $\mathfrak{l}$. Из субмерсивности отображения φ в точках из Y теперь следуют оставшиеся утверждения пункта 3.

Соотношение $T_yX = T_yY \oplus \mathfrak{l}^{\perp}_* y$ следует из того, что $T_yY = \ker d_y\varphi$. Нам осталось показать, что слагаемые в этой прямой сумме ортогональны. Действительно, пусть $v \in T_yY, \eta \in \mathfrak{l}^{\perp}$. Тогда $\omega_x(\eta_* y, v) = \partial_v \langle \mu(y), \eta \rangle = 0$, т.к. функция $y \mapsto \langle \mu(y), \eta \rangle$ равна 0 на Y. $\square$

Нам осталось доказать свойство (c). Этому вытекает из следующего предложения. Напомним, что через ψ обозначено отображение $X \to C, x \mapsto G\mu(x) \cap C$.

Предложение 4. *Рассмотрим отображение $\iota : G *_L Y \to X, [g, y] \mapsto gy$. Оно обладает следующими свойствами:*

(1) $\operatorname{im} \iota = \psi^{-1}(C \cap \mathfrak{l}^{pr})$.

(2) *Отображение ι этально (т.е. дифференциал в любой точке является изоморфизмом).*
(3) *Отображение ι инъективно.*

Доказательство. Для доказательства утверждения (1) заметим, что $\psi(\operatorname{im}\iota) = \psi(Y) \subset C \cap \mathfrak{l}^{pr}$. Отсюда следует включение $\subset$. Для доказательства обратного включения достаточно заметить, что $C \cap \mathfrak{l}^{pr} \cap \mu(X)$ содержится в $\mu(Y)$ из определения Y.

Докажем утверждение (2). Пусть $y \in Y$. Согласно пункту 2.1. предыдущей лекции, $T_{[e,y]}G*_L Y = T_yY \oplus \mathfrak{l}_*^{\perp}y$. С другой стороны, $T_yX = T_yY \oplus \mathfrak{l}_*^{\perp}y$ по пункту 4 предложения 3. Очевидно, что $d_{[e,y]}\iota(v) = v$ для $v \in T_yY$ и $d_{[e,y]}\iota(\xi_*[e,y]) = \xi_* y$ для $\xi \in \mathfrak{l}^{\perp}$. Значит, $d_{[e,y]}\iota$ — изоморфизм. Поскольку отображение ι эквивариантно, оно этально.

Докажем инъективность. Пусть $g_1, g_2 \in G, y_1, y_2 \in Y$ таковы, что $[g_1, y_1] \neq [g_2, y_2], g_1y_1 = g_2y_2$. Можем считать, что $g_1 = 1, g_2 \notin L$, поскольку ограничение ι на $Y \cong [e, Y]$ — вложение. Из $y_1 = g_2y_2$ следует $\mu(y_1) = g_2\mu(y_2)$. Заменив g_2 на $l_1g_2l_2$ с $l_1, l_2 \in L$ можем считать, что $\mu(y_1), \mu(y_2) \in C \cap \mathfrak{l}^{pr}$. Поскольку $\mu(y_1), \mu(y_2) \in C$, то $\mu(y_1) = \mu(y_2)$ и $g \in Z_G(\mu(y_1))$. Но, поскольку $\mu(y_1) \in \mathfrak{l}^{pr}$, $Z_G(\mu(y_1)) = L$. Получаем противоречие с нашими предположениями. $\square$

Замечание 5. Что же называется теоремой о локальном сечении? Точный ответ автору не известен, сам термин заимствован автором у Ф. Кнопа. По-видимому теорема о локальном сечении включает в себя предложения 3,4, а также ответ на такой вопрос:

дана подгруппа Леви $L \subset G$ и гамильтоново L-многообразие Y с $\mu_L(Y) \subset \mathfrak{l}^{pr}$. Как снабдить $G *_L Y$ структурой гамильтонова G-многообразия так, чтобы структура гамильтонова L-действия на Y получалось ограничением действия, формы и отображения моментов с X на $Y \cong [e, Y]$?

Оказывается, что такая структура на X существует и единственна. Более того, эта структура совпадает с ограничением гамильтоновой структуры с X. Читателям рекомендуется поразмышлять над этими вопросами.

1.2. **Свойства и следствия.**

Предложение 6. *В сделанных обозначениях для любой связной компоненты $Y_0 \subset Y$ имеют место равенства* $\dim Y_0 = \dim X - \dim G + \dim L, m_L(Y_0) = m_G(X) - \dim G + \dim L$. *Если действие $G : X$ локально аналитическое как гамильтоново действие, то* $\operatorname{rk}_G(X) = \operatorname{rk}_L(Y_0) - \dim G + \dim L$, $\operatorname{def}_G(X) = \operatorname{def}_L(Y_0)$, $\operatorname{cork}_G(X) = \operatorname{cork}_L(Y)$. *Кроме того,* $\psi(X) \cap \mathfrak{l}^{reg} = \psi_L(Y)$.

Доказательство. Первые два равенства являются непосредственными следствиями предложения 4 и (второе) леммы 15 лекции 4. Эта лемма применима по следствию 18 из лекции 5. Последнее утверждение предложения также следует из предложения 4.

Предположим теперь, что действие $G : X$ локально аналитическое как *гамильтоново* действие (т.е. локально аналитичны форма и отображение моментов). Впоследствии мы убедимся, что это всегда так. Тогда множество точек $x \in X$ с $\dim Gx = m_G(X), \operatorname{rk}\omega|_{Gx} = \operatorname{rk}_G(X)$ составляют большое открытое подмножество в X (упражнение 5). Таким образом, это множество пересекается с $G *_L Y_0 \subset X$. Отметим далее, что, по следствию 13 из лекции 3, $\operatorname{rk}\omega|_{Gx} = \dim G\mu(x)$ для любого $x \in X$. Поэтому для общей точки $y \in Y_0$ выполняются равенства

$$\operatorname{rk}_G(X) = \dim G - \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(y)) = \dim G - \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}}(\mu(y)) = \dim G - \dim L + \operatorname{rk}_L(Y_0).$$

Второе равенство следует из того, что $\mu(y) \in \mathfrak{l}^{pr}$. Равенства для дефектов и корангов следуют из соответствующих определений (см. п.3.2 лекции 4). $\square$

Предложение 7. *Пусть L — минимальная по включению подгруппа Леви в G, имеющая вид $G_{\mu(x)}$. Положим $X^0 = \{x \in X | G_{\mu(x)} \sim L\}$. Тогда*

(1) *Стабилизатор общего положения для действия $G : X$ является подгруппой $L_0 \subset L$, содержащей (L, L).*

(2) *Для произвольной точки $x \in X$ группа $G_{\mu(x)}$ содержит подгруппу сопряженную L.*

(3) *Подмножество всех точек x, для которых $\operatorname{rk} \omega|_{Gx} = \operatorname{rk}_G(X)$, совпадает с X^0.*

Доказательство. Выберем точку $x \in X^0$ и применим к ней теорему о локальном сечении. Получим гамильтоново L-многообразие Y и G-эквивариантное открытое вложение $\iota : G *_L Y \to X$. Отметим, что поскольку $\mu(Y) \subset \mathfrak{l}^{pr}$, и для любой точки $y \in Y$ верно неравенство $\dim L_{\mu(y)} \geqslant \dim L$, то $\mu(y) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ для всех $y \in Y$. Это означает, что отображение моментов для действия $(L, L) : Y$ есть константа 0. Отсюда следует (согласно свойству (M1) отображения моментов, см. п.2.2 лекции 3), что $\omega_y(\xi_* y, v) = 0$ при всех $\xi \in [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}], v \in T_y Y$. Значит $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]_* y = 0$, или, что эквивалентно, $(L, L) \subset L_y$. Пусть теперь y — точка общего положения на некоторой компоненте многообразия Y. В этом случае G_y — стабилизатор общего положения, ибо последний существует. С другой стороны, $(L, L) \subset G_y \subset G_{\mu(y)} = L$. Это доказывает утверждение пункта 1.

Пусть теперь $x \in X$ — произвольная точка. Заменив точку x на сопряженную, можем считать, что $L_0 \subset G_x$. Таким образом $\mu(x) \in \mathfrak{g}^{(L,L)} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$. Подалгебра $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ является максимальной коммутативной в $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}([\mathfrak{l}, \mathfrak{l}])$, поскольку $\mathfrak{l} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{z}(\mathfrak{l}))$. Поэтому, сопрягая x элементом группы $Z_G((L, L))$, можем добиться того, чтобы $\mu(x) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) \Leftrightarrow \mathfrak{l} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(x))$. Это доказывает утверждение пункта 2. Утверждение пункта 3 следует из предыдущего и того, что $\operatorname{rk} \omega|_{Gx} = \dim G - \dim \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(x))$. □

Задача 2. Пусть гамильтоново действие $G : X$ локально аналитическое. Тогда образ отображения ι из предложения 4 содержит большое открытое подмножество.

2. Теорема о симплектическом слайсе. Модельные гамильтоновы многообразия

Этот раздел посвящен формулировке и началу доказательства теоремы о симплектическом слайсе — аналогу теоремы о слайсе из предыдущей лекции. Здесь G — произвольная компактная группа, X — гамильтоново G-многообразие с симплектической формой ω и отображением моментов μ.

2.1. **Формулировка теоремы. Определяющие тройки.** В предыдущей лекции мы видели, что строение действия компактной группы в окрестности некоторой точки $x \in X$ определяется двумя вещами: стабилизатором точки x в группе G и нормальным пространством к орбите, рассматриваемым как G_x-модуль.

Если действие у нас не простое, а гамильтоново, то для описания структуры гамильтонова действия в окрестности точки придется использовать какие-то ещё "параметры". Очевидно, что в список этих параметров надо включить дополнительно образ точки при отображении моментов. Оказывается, что этого и достаточно. Нам, однако, будет удобно организовать наши данные по другому.

Пусть $x \in X, \xi = \mu(x), H = G_x$. Нормальное пространство к орбите H-эквивариантно отождествляется с $(\mathfrak{g}_* x)^{\perp}$ (ортогональное дополнение берется по симплектической форме). Мы можем сказать нечто про строение пространства $(\mathfrak{g}_* x)^{\perp}$. Во-первых, фактор $V = (\mathfrak{g}_* x)^{\perp} / (\mathfrak{g}_* x \cap \mathfrak{g}_* x^{\perp})$ является симплектическим векторным H-пространством. Во-вторых, мы знаем, как устроен H-модуль $\mathfrak{g}_* x \cap (\mathfrak{g}_* x)^{\perp}$. Действительно, по следствию 13 пункта 2.2 лекции 3

$$\omega|_{Gx} = \mu^* \omega^{KK}, \tag{2.1}$$

где ω^{KK} — форма Костанта-Кириллова на орбите $G\xi$. Таким образом, $\xi_* x \in \mathfrak{g}_* x \cap (\mathfrak{g}_* x)^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $0 = d_x \mu(\xi_* x) = [\xi, \mu(x)]$, т.е. когда $\xi \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(x))$. Таким образом, $\mathfrak{g}_* x \cap (\mathfrak{g}_* x)^{\perp} \cong \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mu(x)) / \mathfrak{h} \cong \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi) \cap \mathfrak{h}^{\perp}$. Мы видим, что, по крайней мере, структура действия в окрестности точки x однозначно определяется по тройке (H, ξ, V), которую мы назовем *определяющей* для точки x.

Оказывается, что верна следующая теорема:

Теорема 8. *Определяющая тройка однозначно определяет структуру гамильтонова G-многообразия на некоторой G-инвариантной окрестности точки x. Обратно, для любой подгруппы $H \subset G$, любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}^H$ и любого симплектического H-модуля V существует гамильтоново G-многообразие X и точка $x \in X$, для которой определяющая тройка совпадает с (H, ξ, V).*

Первую часть теоремы (единственность) мы докажем на следующей лекции. А теперь займемся построением как можно более простого гамильтонова G-многообразия с заданной определяющей тройкой.

2.2. **Конструкция модельного многообразия.** Пусть H — редуктивная подгруппа в G, $\xi \in \mathfrak{g}^H$, V — пространство симплектического векторного представления группы H с формой ω_V. Положим $U = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi) \cap \mathfrak{h}^{\perp}$. Это H-инвариантное подпространство в $\mathfrak{g}$.

Нашей задачей в этом пункте является построение замкнутой G-инвариантной формы ω на однородном расслоении $G *_H (U \oplus V)$ и G-эквивариантного аналитического отображения $\mu : G *_H (U \oplus V) \to \mathfrak{g}$ обладающих следующими свойствами:

(1) Подмножество точек X^0, в которых форма ω невырождена, включает орбиту Gx с $x = [e, (0,0)]$.
(2) μ — отображение моментов для действия $G : X^0$.
(3) Определяющая тройка точки $[1, (0,0)]$ совпадает с (H, ξ, V).

Отображение $\mu : G *_H (U \oplus V)$ зададим формулой

$$\mu([g,(u,v)]) = \mathrm{Ad}(g)(\xi + u + \mu_H(v)), g \in G, u \in U, v \in V. \tag{2.2}$$

Здесь $\mu_H : V \to \mathfrak{h}$ — отображение моментов для действия $H : V$. Напомним, что $(\mu_H(v), \eta) = \frac{1}{2}\omega_V(\eta v, v)$ для $\eta \in \mathfrak{h}$.

Отображение μ корректно определено и G-эквивариантно, поскольку отображение $(u, v) \mapsto \xi + u + \mu_H(v)$ является H-эквивариантным, ибо таковы все три слагаемых. Попытаемся объяснить, почему надо брать именно такое отображение. Множитель $\mathrm{Ad}(g)$ нужен для эквивариантности. Слагаемое ξ — для того, чтобы обеспечить требуемое условием 3 равенство $\mu([1,(0,0)]) = \xi$. Далее пространства U, V естественным образом отображаются в $\mathfrak{g}$: U есть просто подмножество в $\mathfrak{g}$, а для V есть отображение моментов, бьющее в $\mathfrak{h}$. Что мы и записали.

Теперь введем форму ω на X. Как мы помним, п. 2.1. лекции 5, в точке $x = [e,(u,v)]$ имеет место естественное отождествление $T_xX = \mathfrak{h}^{\perp} \oplus U \oplus V$. Вычислим производные $\partial_v(\mu(x), \eta)$ для $v \in T_xX, \eta \in \mathfrak{h}^{\perp}$.

$$\begin{aligned} &\partial_{\eta_1}(\mu(x),\eta) = [G-\text{эквивариантность}] = (\mu(x), [\eta, \eta_1]), \eta_1 \in \mathfrak{h}^{\perp}.\\ &\partial_{u_1}(\mu(x),\eta) = (u_1, \eta), u_1 \in U.\\ &\partial_{v_1}(\mu(x),\eta) = 0, v_1 \in V.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Зададим кососимметрическую форму ω_x на T_xX по формуле

$$\begin{aligned} &\omega_x(\eta_1 + u_1 + v_1, \eta_2 + u_2 + v_2) = \omega_V(v_1, v_2) + (\eta_1, u_2) - (\eta_2, u_1) + (\mu(x), [\eta_1, \eta_2]),\\ &u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V, \eta_1, \eta_2 \in \mathfrak{h}^{\perp}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Поясним почему разумно выбрать именно такую форму. Во-первых, если мы хотим, чтобы μ было отображением моментов, то вектор η_1 должен спариваться со всеми остальными именно таким образом, ибо $\omega(\eta_1, \eta_2 + u_2 + v_2) = \partial_{\eta_2+u_2+v_2}(\mu(x), \eta_1)$. Далее, два вектора из V могут быть естественно спарены только с помощью формы ω_V. Способа спарить вектор из V с векторами из U нет, поэтому они и не спариваются.

Упражнение 3. $h_*\omega_x = \omega_{hx}$ для всех $h \in H$.

Таким образом, можем разнести форму ω с $[e, U \oplus V]$ на все X и получить G-инвариантную 2-форму.

Упражнение 4. Для $x = [e,(u,v)], \eta \in \mathfrak{g}$ верны равенства

$$(2.5)\quad \omega_x(\eta_* x, \eta_2 + u_2 + v_2) = (\eta, u_2 + d_v\mu_H(v_2)) + (\mu(x), [\eta, \eta_2]), \forall \eta_2 \in \mathfrak{h}^\perp, u_2 \in U, v_2 \in V.$$

(Указание: произведите проверку отдельно для случаев $\eta \in \mathfrak{h}^\perp, \eta \in \mathfrak{h}$)

$$(2.6)\qquad \omega_x(\eta_* x, v) = \partial_v(\mu(x), \eta) = (\partial_v\mu(x), \eta), \forall v \in T_x([e, U \oplus V]).$$

Следующее предложение показывает, что мы построили то, что и хотели

Предложение 9. *Форма ω замкнута и выполняются условия 1,2,3.*

Доказательство. Из инвариантности следует, что достаточно проверить, что $d\omega = 0$ в точке x вида $[e,(u,v)]$. Нам достаточно выбрать некоторый набор векторных полей на окрестности точки x в X и показать, что

$$(2.7)\quad L_\nu(\omega(\mu,\lambda)) + L_\mu(\omega(\lambda,\nu)) + L_\lambda(\omega(\nu,\mu)) = \omega([\nu,\mu],\lambda) + \omega([\mu,\lambda],\nu) + \omega([\lambda,\nu],\mu)$$

в точке x для всех полей ν, μ, λ из данного набора. Мы выберем набор, состоящий из векторных полей двух типов:

(a) η_* для $\eta \in \mathfrak{h}^\perp$.

(b) Полей вида $\widehat{\zeta}$ в некоторой окрестности слоя $[e, U \oplus V]$, которые определяются так. Возьмем постоянное векторное поле ζ на $U \oplus V$. Пусть $\pi : G *_H (U \oplus V)$ — каноническая проекция. Для некоторой окрестности $O \subset \mathfrak{h}^\perp$ точки 0 отображение $\eta \mapsto \exp(\eta)H$ является диффеоморфизмом на открытую окрестность точки eH в G/H. На $\pi^{-1}(O)$ корректно определено векторное поле ν, для которого

$$(2.8)\qquad \widehat{\zeta}_{[\exp(\eta),(u,v)]} = \exp(\eta)_* \zeta_{(u,v)}.$$

Сделаем несколько замечаний по поводу выбранных полей. Во-первых для векторных полей $\eta_*, \widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2$ выполняются равенства

$$(2.9)\qquad [\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2] = 0$$

$$(2.10)\qquad [\eta_*, \widehat{\zeta}_2]_x = 0.$$

Действительно, по определению, векторные поля $\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2$ касательны к слоям расслоения $G *_H (U \oplus V) \to G/H$, причем для каждого слоя они получаются push-forward'ом из постоянных векторных полей на слое $[e, U \oplus V]$. Отсюда следует равенство (2.9). Равенство (2.10) следует теперь из $[\eta_*, \widehat{\zeta}] = L_{\eta_*}\widehat{\zeta}$ и равенства (2.8).

В силу инвариантности формы ω и (2.9,2.10) мы имеем

$$L_{\eta_{1*}}\omega_x(\eta_{2*}, \eta_{3*}) = \omega_x([\eta_1,\eta_2]_*, \eta_{3*}) + \omega_x([\eta_3,\eta_1]_*, \eta_{2*}) = [(2.4)] = \langle \mu(x), [\eta_1, [\eta_2, \eta_3]] \rangle.$$

$$(2.11)\quad L_{\eta_{1*}}\omega_x(\eta_{2*}, \widehat{\zeta}_1) = \omega_x([\eta_1,\eta_2]_*, \widehat{\zeta}_1).$$

$$L_{\eta_{1*}}\omega_x(\widehat{\zeta}_1, \widehat{\zeta}_2) = 0.$$

Из равенства (2.4) получаем, что

$$L_{\widehat{\zeta}_1}\omega_x(\eta_{1*}, \eta_{2*}) = -\langle \partial_{\zeta_1}\mu(x), [\eta_1, \eta_2] \rangle = [(2.6)] = -\omega_x([\eta_1,\eta_2]_*, \widehat{\zeta}_1).$$

$$(2.12)\qquad L_{\widehat{\zeta}_1}\omega_x(\eta_{1*}, \widehat{\zeta}_2) = [\text{дифференцирование постоянной функции}] = 0.$$

$$L_{\widehat{\zeta}_1}\omega_x(\widehat{\zeta}_2, \widehat{\zeta}_3) = 0.$$

Из (2.11), (2.12) следует справедливость равенства (2.7) в точке x в случае, когда λ, μ, ν — поля типа (a),(b). Для того, чтобы в этом убедиться надо заменить левую часть уравнения (2.7) суммой соответствующих правых частей уравнений (2.11), (2.12).

Для проверки условия (1) достаточно проверить, что $\omega_{[e,(0,0)]}$ — невырожденная форма. Действительно,

$$(2.13)\quad \omega_{[e,(0,0)]}(\eta_1 + u_1 + v_1, \eta_2 + u_2 + v_2) = \omega_V(v_1, v_2) + (\eta_1, u_2) - (\eta_2, u_1) + \langle \xi, [\eta_1, \eta_2] \rangle$$

Пусть $\eta_1 + u_1 + v_1 \in \ker \omega_{[e,(0,0)]}$. При $\eta_2 = u_2 = 0$ в (2.13) $v_1 = 0$, поскольку ω_V — невырожденная форма. При $v_2 = 0, \eta_2 = 0$ видим, что $\eta_1 \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi)^{\perp}$. При $u_2 = 0, v_2 = 0, \eta_2 \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi)^{\perp}$ видим, что $\langle \xi, [\eta_1, \eta_2] \rangle$ для всех η_2, т.е. $\eta_1 = 0$ из невырожденности скобки Костанта-Кириллова. Таким образом, из (2.13) следует, что $(u_1, \eta_2) = 0$ для всех $\eta_2 \in \mathfrak{h}^{\perp} \cap \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi)$, и значит $u_1 = 0$. Что и требовалось.

Покажем, что μ — отображение моментов. Поскольку отображение μ эквивариантно, то остается проверить, что для $x = [e, (u, v)]$ и всех $v_1 \in T_x X \cong \mathfrak{h}^{\perp} \oplus U \oplus V$ имеет место равенство

$$\omega_x(\eta_*, v_1) = \partial_{v_1} \langle \mu(x), \eta \rangle. \tag{2.14}$$

Для $v_1 \in U \oplus V$ это следует из равенства (2.6). Для $v_1 = \eta_1 \in \mathfrak{h}^{\perp}$ согласно (2.5) имеем $\omega_x(\eta_* x, v_1) = (\mu(x), [\eta_*, \eta_1]) = ([\eta_1, \mu(x)], \eta)$, а далее остается воспользоваться эквивариантностью отображения μ.

То, что (H, ξ, V) является определяющей тройкой для действия $G : X^0$ и точки $x = [e, (0, 0)]$ следует из (2.13). $\square$

Задача 5. Докажите, что если $\xi = 0$, то форма ω невырождена на всем X. Более того, многообразие X однородно в следующем смысле. На нем действует группа $\mathbb{R}^*$ так, что $t_* \omega = t^{-2} \omega$.

Определение 10. Многообразие X^0 с формой ω, действием группы G и отображением моментов μ называется *модельным гамильтоновым многообразием.*

Замечание 11. Модельное гамильтоново многообразие аналитично.

3. Комментарии по поводу литературы

Оба основных результата этой лекции принадлежат Гийемину и Стернбергу, [1]. При этом их конструкция модельного многообразия (термин мой) отличается от приведенной выше. Её можно также посмотреть в [2]. Наша конструкция является более явной.

Литература

[1] V. Guillemin, S. Sternberg. Symplectic techniques in physics. Cambridge University Press, 1984.

[2] R. Sjamaar. Convexity properties of the moment mapping re-examined. Adv.Math 138(1998), p. 46-91. Также arXiv:math. dg-ga/9408001 v2.