ЛЕКЦИЯ 7

Содержание

1. Теорема о симплектическом слайсе. Продолжение

Через G мы обозначаем компактную группу Ли.

На прошлой лекции мы для каждой тройки (H, ξ, V), где H — подгруппа Ли в G, $\xi \in \mathfrak{g}^H, V$ — симплектический H-модуль, построили модельное гамильтоново G-многообразие $M_G(H, \xi, V)$, являющееся открытым подмножеством в $G *_H (U \oplus V)$, для которого тройка (H, ξ, V) является определяющей для точки $[e, (0, 0)] \in M_G(H, \xi, V)$ (раздел 2 лекции 6). На этой лекции мы докажем вторую часть теоремы о симплектическом слайсе, а именно, следующее утверждение

(*) для любого гамильтонова G-многообразия X и его точки $x \in X$ с определяющей тройкой (H, ξ, V) существует малая G-инвариантная окрестность O точки x, изоморфная как гамильтоново G-многообразие G-инвариантной окрестности точки $[e, (0, 0)]$ в $M_G(H, \xi, V)$.

Начнем мы с эквивариантной версии теоремы Дарбу-Вейнстейна, очень важной самой по себе.

1.1. Эквивариантная теорема Дарбу-Вейнстейна.

Теорема 1. *Пусть X — гладкое G-многообразие, Y — его компактное G-инвариантное подмногообразие. Предположим, что на X заданы две симплектические формы ω^0, ω^1, совпадающие в точках многообразия Y. Тогда найдутся G-инвариантные окрестности U_0, U_1 подмногообразия Y в X и G-эквивариантный диффеоморфизм $\varphi : U_0 \to U_1$, тождественный на Y и такой, что $\varphi^*(\omega^1) = \omega^0$.*

Замечание 2. Предположение о компактности X можно отбросить.

Доказательство. Отметим, что мы можем заменить X на произвольную малую G-инвариантную окрестность подмногообразия Y. Рассмотрим 2-форму $\omega^t = (1-t)\omega^0 + t\omega^1, t \in \mathbb{R}$. Это замкнутая 2-форма, в точках из Y совпадающая с ω^0. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и полагаем $I = (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Подмножество

$$X^0 = \{x \in X | \omega^t_x \text{ невырождена для всех } t \in I\}$$

открыто и G-инвариантно. Можем считать, что ω^t — симплектическая форма на X для всех $t \in I$.

Предположим, что мы нашли семейство G-инвариантных векторных полей $\xi^t, t \in I$, на некоторой G-инвариантной окрестности O подмногообразия Y, обладающее следующими свойствами

(1) ξ^t гладко зависит от t.
(2) $L_{\xi^t}\omega^t = \omega^1 - \omega^0$.
(3) $\xi^t_y = 0$ для всех $y \in Y$.

Мы утверждаем, что поток этого семейства доставляет требуемый диффеоморфизм. Поясним, во-первых, как понимать слова "поток семейства". Рассмотрим G-многообразие $X \times I$, где действие группы G на втором множителе тривиально. Рассмотрим векторное поле ξ на $X \times I$, заданное равенством $\xi_{(x,t)} = \xi^t_x + \frac{\partial}{\partial t}, x \in X, t \in I$. В точках из Y имеем $\xi_{(y,t)} = \frac{\partial}{\partial t}$. Поэтому поток векторного поля ξ определен в некоторой окрестности подмногообразия $\widetilde{O}$ подмногообразия $Y \times I \subset X \times I$. При этом координата по I у точки $\exp(t_1\xi)(x, t_2)$ равна $t_1 + t_2$. Имеем соответствующий диффеоморфизм $\varphi = \exp(\xi) : O_0 = \widetilde{O} \cap X \times \{0\} \to O_1 = \widetilde{O} \cap X \times \{1\}$. При этом ограничение отображения φ на Y тождественно. Отображение φ является G-эквивариантным, ибо поле ξ инвариантно.

Остается показать, что $\varphi^*(\omega^1) = \omega^0$. Отметим, что $L_\xi \pi_1^*(\omega^t) = \pi_1^*(\omega^1 - \omega^0)$, где $\pi_1 : X \times I \to X$ — проекция. Отсюда следует, что (на соответствующей окрестности)

$$\exp(t_2\xi)^*\pi_1^*(\omega^{t_1}) = \exp(t_2\xi)_*^{-1}\pi_1^*(\omega^{t_1}) = \pi_1^*\omega^{t_1} - \int_0^{t_2} L_\xi \pi_1^*(\omega^{t_1}) = \pi_1^*\omega^{t_1 - t_2},$$

что немедленно дает требуемое при $t_1 = t_2 = 1$.

Итак, дело за малым, — построить такое семейство векторных полей ξ^t. Для этого нам нужна следующее утверждение (эквивариантная теорема о трубчатой окрестности), обобщающее теорему о слайсе из лекции 5 и доказывающееся аналогично.

Теорема 3. *Пусть X — G-многообразие, Y — (компактное) G-инвариантное подмногообразие в X, $\mathcal{N}$ — нормальное расслоение к Y в X (отметим, что это G-расслоение). Тогда найдется окрестность O подмногообразия Y в X, которая изоморфна как G-многообразие G-инвариантной окрестности O' нулевого сечения в $\mathcal{N}$.*

Отметим, что мы можем ввести G-инвариантную метрику на слоях расслоения $\mathcal{N}$ и считать, что O' состоит из векторов в $\mathcal{N}$, имеющих длину меньше d. Заменив X на O', можем считать, что X — окрестность нулевого слоя в некотором расслоении, устойчивая относительно умножения на действительное число $t, |t| \leqslant 1$. Таким образом, мы имеем локальное действие группы $\mathbb{R}^*$ на X послойным умножением, перестановочное с действием группы G. Обозначим через m_t преобразование, являющееся умножением на t в слоях, через ζ — вектор скорости для (локального) действия группы $\mathbb{R}^*$ на X. Имеем естественную проекцию $\pi : X \to Y$.

Задача 1. Для любой формы ω имеет место равенство $\omega - \pi^*(\omega|_Y) = d\int_0^1 \iota_\eta m_t^*\omega dt$.

Применим задачу 1 к 2-форме $\omega^1 - \omega^0$. Мы получим G-инвариантную 1-форму $\alpha = \int_0^1 \iota_\eta m_t^*(\omega^1 - \omega^0)dt$, равную 0 в точках из Y и такую, что $d\alpha = \omega^1 - \omega^0$. Форма $\omega^t, t \in I$, невырождена на X, поэтому существует единственное векторное поле ξ^t на X, для которого $\iota_{\xi^t}\omega^t = -\alpha$. Векторное поле ξ^t является G-инвариантно, ибо таковы ω^t, α. Проверим, что ξ^t удовлетворяет условиям 1-3, указанным выше. Гладкая зависимость от t очевидна. Далее, $L_{\xi^t}\omega^t = -(d\iota_{\xi^t} + \iota_{\xi^t}d)\omega^t = -d\iota_{\xi_t}\omega^t = d\alpha = \omega^1 - \omega^0$, значит свойство 2) выполнено. Свойство 3) выполнено потому, что $\alpha_y = 0$ для $y \in Y$. □

1.2. **Завершение доказательства теоремы о симплектическом слайсе.**

Доказательство утверждения (*). Применим теорему о слайсе к действию $G : X$. Получим две G-инвариантные симплектические формы ω^1, ω^2 на расслоении $G *_H O$, где O — H-инвариантная окрестность 0 в пространстве $U \oplus V$. Формы ω^1, ω^2 имеют в точке $[e, 0]$ совпадающие определяющие тройки. Мы хотим применить теорему Дарбу-Вейнстейна к паре (X, Gx). Однако, мы пока не находимся в условиях этой теоремы: формы ω^1, ω^2 не равны в точках орбиты Gx. Все что мы знаем о них — это следующее:

(1) Ограничения форм ω^1, ω^2 на $\mathfrak{g}_* x$ равны (они определяются по образу отображения моментов).
(2) Пусть $\widetilde{V}^1, \widetilde{V}^2$ — ортогональные дополнения к U по формам ω^1, ω^2, соответственно. Тогда существует H-эквивариантный изоморфизм симплектических модулей $\widetilde{V}^1/(\widetilde{V}^1 \cap \mathfrak{g}_* x) \cong \widetilde{V}^2/(\widetilde{V}^2 \cap \mathfrak{g}_* x)$.

Чтобы перейти в "область применимости" нам надо сделать два шага: "доказательство на инфинитезимальном уровне" и "переход от инфинитиземального к локальному".

Первый заключается в доказательстве следующей леммы

Лемма 4. *Пусть G — компактная группа Ли, V — G-модуль, U — G-инвариантное подпространство в V. Пусть на V заданы две симплектические линейные формы ω^1, ω^2, совпадающие на U. Пусть V_1, V_2 — ортогональные дополнения к U относительно ω^1, ω^2. Предположим, что симплектические G-модули $\widetilde{V}_1/(\widetilde{V}_1 \cap U), \widetilde{V}_2/(\widetilde{V}_2 \cap U)$ изоморфны. Тогда существует линейный изоморфизм $\Phi : V \to V$ неподвижный на U и такой, что $\Phi^* \omega^2 = \omega^1$.*

Доказательство леммы 4. Обозначим через $V_i, i = 1, 2$, инвариантное подпространство в $\widetilde{V}_i$, дополняющее $U \cap \widetilde{V}_i$ в $\widetilde{V}_i$. Ограничение формы ω^i на V_i невырождено. По условию существует изоморфизм $\varphi_0 : V_1 \to V_2$, для которого $\omega^1|_{V_1} = \varphi_0^* \omega^2|_{V_2}$. Из полной приводимости найдется изоморфизм $\Phi_0 : V \to V$, тождественный на U и совпадающий с φ_0 на V_1. Заменив ω^2 на $\Phi_0^* \omega^2$, мы можем считать, что $V_1 = V_2$ и что $\omega|_{U \oplus V_1} = \omega|_{U \oplus V_2}$. Иными словами, мы с самого начала могли считать, что подпространство U является коизотропным относительно обеих форм ω^1, ω^2.

Рассмотрим теперь случай, когда $\omega^1|_U = \omega^2|_U = 0$, т.е. когда U — лагранжев подмодуль. Выберем инвариантное подпространство U_1, дополняющее U в V. Определим операторы $B_i : U_1 \to U_1^*, C_i : U_1^* \to U, i = 1, 2$, по формулам $\langle B_i v_2, v_2' \rangle = \omega^i(v_2, v_2'), \langle \alpha, v_2 \rangle = \omega^i(v_2, C_i \alpha), v_1 \in U, v_2 \in U_1, \alpha \in U_1^*$.

Сперва мы сведем дело к случаю, когда пространство U_1 изотропно относительно обеих форм. Определим операторы $\Psi_i : V \to V$ так, чтобы $\Psi_i(v_1) = v_1, \Psi_i(v_2) = v_2 + \frac{1}{2} C_i B_i v_2, v_1 \in U, v_2 \in U_1$. Имеем равенство

$$\omega^i(\Psi_i(v_2), \Psi_i(v_2')) = \omega^i(v_2, v_2') + \frac{1}{2}(\omega^i(C_i B_i v_2, v_2') + \omega^i(v_2, C_i B_i v_2')) =$$
$$= \omega^i(v_2, v_2') - \frac{1}{2}\langle B_i v_2, v_2' \rangle + \frac{1}{2}\langle B_i v_2', v_2 \rangle = 0.$$

Заменив ω^i на $\Psi_i^* \omega^i$, добьемся требуемого.

Определим операторы $A_i : U_1 \to U^*, i = 1, 2$, по формулам $\langle A_i v_2, v_1 \rangle = \omega^i(v_1, v_2), v_1 \in U, v_2 \in U_1$. Положим $\Phi(v_1) = v_1, \Phi(v_2) = A_2^{-1} A_1 v_2, v_1 \in U, v_2 \in U_1$. Поскольку Φ оставляет на месте U, U_1, достаточно проверить, что $\omega^1(v_1, v_2) = \omega^2(\Phi v_1, \Phi v_2)$ для $v_1 \in U, v_2 \in U_1$. Но $\omega^2(\Phi v_1, \Phi v_2) = \langle A_2 \Phi v_2, v_1 \rangle = \langle A_1 v_1, v_2 \rangle = \omega^1(v_1, v_2)$. Таким образом, в данном случае все доказано.

Пусть теперь $\omega^i|_U \neq 0$. Пусть $U_0 \subset U$ — максимальный симплектический подмодуль, $V_i = U_0^{\perp}$, где дополнение берется относительно ω^i. Заметим, что $V_1 \cong V/U_0 \cong V_2$. Поэтому найдется изоморфизм Φ_0 тождественный на U_0 и такой, что $\Phi_0(V_1) = V_2$. Заменив ω^2 на $\Phi_0^* \omega^2$, добьемся выполнения равенства $V_1 = V_2$. Отметим, что $U \cap V_1$ — лагранжев подмодуль в $V_1 = V_2$. Существует постоянный на $U \cap V_1$ изоморфизм $\Phi_1 : V_1 \to V_1$, для которого $\Phi_1^* \omega^2|_{V_1} = \omega^1|_{V_1}$. Осталось положить $\Phi(u_0) = u_0, \Phi(v_1) = \Phi_1(v_1), u_0 \in U_0, v_1 \in V_1$. □

Для второго шага нам нужна следующая лемма

Лемма 5. *Пусть X — G-многообразие, $x \in X$. Предположим, что задан G_x-эквивариантный линейный изоморфизм $\Phi : T_x X \to T_x X$, тождественный на $\mathfrak{g}_* x$. Тогда* *существуют G-инвариантные окрестности U_1, U_2 орбиты Gx и тождественный на Gx диффеоморфизм $\varphi : U_1 \to U_2$, удовлетворяющий условию $d_x\varphi = \Phi$.*

Доказательство леммы 5. Пусть сперва X — однородное линейное расслоение $G *_H V$ и $x = [e, 0]$. Мы можем записать $\Phi|_V$ как $\Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 — G-инвариантный изоморфизм $V \to V$, а Φ_2 — G-эквивариантное отображение $V \to \mathfrak{g}_*x \cong \mathfrak{h}^\perp$.

Упражнение 2. Отображение $\varphi : X \to X, [g, v] \mapsto [g \exp(\Phi_2(v)), \Phi_1(v)]$ обладает требуемыми свойствами.

Общий случай сводится к этому применением теоремы о слайсах из лекции 5. □

Завершим доказательство утверждения (*). Прежде всего, согласно лемме 4, мы найдем H-эквивариантный изоморфизм $\Phi : T_xX \to T_xX$, постоянный на $\mathfrak{g}_*x$ и такой, что $\Phi^*\omega_x^2 = \omega_x^1$. Согласно лемме 5, найдется диффеоморфизм (некоторых G-инвариантных окрестностей орбиты Gx в X) φ, постоянный на Gx с дифференциалом в точке $x = [e, 0]$ равным Φ. Заменив ω^2 на $\varphi^*\omega^2$, можем считать, что $\omega^1 = \omega^2$ в точках орбиты Gx. Теперь, применив теорему Дарбу-Вейнстейна, мы можем считать, что $\omega^1 = \omega^2$ на X. Докажем, что при этом два имеющихся отображения моментов совпадают. Нам известно, что они совпадают на орбите Gx. Поскольку отображение моментов для гамильтонова действия определено однозначно с точностью до постоянного отображения $X \to \mathfrak{g}$ (лекция 4), получаем требуемое. □

Следствие 6. *Гамильтоново действие компактной группы локально аналитично.*

Замечание 7. Теорема о симплектических слайсах обычно компануется с теоремой о локальном сечении. Последняя сводит гамильтоново действие в окрестности данной точки x к действию с центральным $\mu(x)$. Модифицируя отображение моментов можно считать, что $\mu(x) = 0$. После этого к точке x применяется теорема о симплектическом слайсе. Связано это с наличием на соответствующем модельном многообразии хорошего умножения на константы (см. задачу 5 из предыдущей лекции).

2. Напоминание из алгебраической геометрии и теории алгебраических групп

2.1. **Проективные алгебраические многообразия.** Напомним, что *вложенное проективное алгебраическое многообразие* — это множество нулей в $\mathbb{CP}^n$ (конечного) набора однородных многочленов. Вложенному проективному многообразию X сопоставляется его *однородное координатное кольцо* $\mathbb{C}_h[X]$. В частности, $\mathbb{C}_h[\mathbb{CP}^n]$ есть кольцо многочленов от $n+1$ со стандартной градуировкой. Кольцо $\mathbb{C}_h[X]$ всегда не имеет нильпотентов и не имеет делителей нуля тогда и только тогда, когда многообразие X неприводимо. Кольцо $\mathbb{C}_h[X]$ градуированно. Его компоненту степени n мы обозначаем через $\mathbb{C}_h[X]_n$. Отметим, что $\mathbb{C}_h[X]_n = 0$ при $n < 0$, $\mathbb{C}$ при $n = 0$, и что $\mathbb{C}_h[X]_1$ порождает $\mathbb{C}_h[X]$. Обратно, градуированной алгебре A без нильпотентов такой, что A порождается компонентой степени 1, сопоставляется вложенное проективное неприводимое многообразие X с $\mathbb{C}_h[X] = A$ (правда вложение определено не однозначно).

Обсудим два важных вложения проективных многообразий.

d-кратное вложение (вложение Веронезе). Это вложение $\varphi : \mathbb{CP}^n \hookrightarrow \mathbb{CP}^m$ с $m = C_{n+d}^d - 1$ для $d \geqslant 1$. Оно устроено так: точка $x \in \mathbb{CP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, $x = [v]$, переходит в $[v^d] \in \mathbb{P}(S^d\mathbb{C}^{n+1})$.

Упражнение 3. Укажите уравнения, задающие $\varphi(\mathbb{CP}^n) \subset \mathbb{CP}^m$.

Ограничивая вложение Веронезе на подмногообразие $X \subset \mathbb{CP}^n$, получаем вложение $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{CP}^m$. Из конструкции видно, что $\mathbb{C}_h[\varphi(\mathbb{CP}^n)]_k = \mathbb{C}_h[\mathbb{CP}^n]_{dk}$ и, стало быть, $\mathbb{C}_h[\varphi(X)]_k = \mathbb{C}_h[X]_{dk}$ для всех $X \subset \mathbb{CP}^n$.

Вложение Сегре. Это вложение $\varphi : \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m \hookrightarrow \mathbb{CP}^{mn+m+n}$. Оно устроено так: точка $(x,y) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m \cong \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{m+1}), (x,y) = ([u],[v])$ переходит в $[u \otimes v] \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^{m+1}) = \mathbb{CP}^{mn+m+n}$.

Упражнение 4. Укажите уравнения, задающие $\varphi(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m) \subset \mathbb{CP}^{mn+n+m}$.

Ограничивая φ на $X \times Y \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ мы получаем вложение $X \times Y \hookrightarrow \mathbb{CP}^{mn+m+n}$. Когда мы будем говорить о произведении вложенных проективных многообразий как о вложенном проективном многообразии, мы будем иметь ввиду именно это вложение. Непосредственно из построения видим, что $\mathbb{C}_h[\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m]_k = \mathbb{C}_h[\mathbb{CP}^n]_k \otimes \mathbb{C}_h[\mathbb{CP}^m]_k$, и стало быть, $\mathbb{C}_h[X \times Y]_k = \mathbb{C}_h[X]_k \otimes \mathbb{C}_h[Y]_k$.

Проективное алгебраическое многообразие — это алгебраическое многообразие изоморфное вложенному алгебраическому многообразию. Отметим, что никакого естественного способа сопоставить проективному многообразие градуированное кольцо не существует.

Наконец, укажем способ сопоставлять проективное алгебраическое многообразие произвольной конечно-порожденной градуированной алгебре.

Предложение 8. *Пусть A — конечно-порожденная градуированная (неотрицательными степенями) алгебра. Тогда найдется такое число $d \in \mathbb{N}$, что градуированная алгебра $A^{(d)}$ с $A^{(d)}_n = A_{dn}$ порождается своей компонентой степени 1.*

Доказательство см. в [1], гл.3, §1.

Мы сопоставляем алгебре A вложенное проективное многообразие, соответствующее алгебре $A^{(d)}$, где d удовлетворяет условию предыдущего предложения.

Упражнение 5. Покажите, что это проективное многообразие не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора числа d.

Это многообразие обозначается через $\mathrm{Proj}(A)$.

2.2. **Алгебраические группы.** Под алгебраической группой мы будем понимать (комплексное) аффинное алгебраическое многообразие, снабженное групповой структурой так, чтобы групповые операции были морфизмами алгебраических многообразий. Любая алгебраическая группа наделяется единственной структурой комплексной группы Ли.

Пример 9. Алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$, группы верхнетреугольных и строго верхнетреугольных матриц.

Подгруппа алгебраической группы называется алгебраической, если она есть замкнутое подмногообразие. Скажем, коммутант, радикал (т.е. наибольшая разрешимая нормальная подгруппа) и связная компонента единицы (в смысле теории групп Ли) алгебраической группы являются алгебраическими подгруппами.

Регулярное действие алгебраической группы на алгебраическом многообразии — это действие, задаваемое морфизмом алгебраических многообразий. Орбиты такого действия — локально-замкнутые (т.е. открытые в своем замыкании) подмногообразия, а стабилизаторы — алгебраические подгруппы.

Пусть дано регулярное действие $G : X$. Имеем линейное представление группы G автоморфизмами в $K[X]$. Оказывается, что любой элемент $f \in K[X]$ содержится в конечномерном регулярном G-подмодуле в $K[X]$. Иными словами, G-модуль $K[X]$ является суммой своих конечномерных подмодулей. Такие G-модули называются локально-конечными. Пусть теперь многообразие X аффинно. Выберем систему образующих $f_1, \ldots, f_n$ алгебры $K[X]$. Найдется конечномерный G-подмодуль $V \subset K[X]$, содержащий $f_1, \ldots, f_n$. Имеем отображение $S(V) \to K[X]$, являющееся эпиморфизмом, поскольку $f_1, \ldots, f_n$ — образующие. Этот эпиморфизм индуцирует G-эквивариантное вложение $X \hookrightarrow V^*$. Таким образом,

Предложение 10. *Всякое аффинное G-многообразие допускает эквивариантное замкнутое вложение в конечномерный регулярный G-подмодуль.*

Следствие 11. *Для всякой алгебраической группы существует точное линейное представление (поэтому алгебраические группы, в том смысле, как мы их понимаем, называются ещё линейными).*

Доказательство. Например, можно взять тот G-модуль, в который вкладывается (левое) G-многообразие G. $\square$

Если G — алгебраическая группа, а H — её алгебраическая подгруппа, то однородное пространство G/H снабжается единственной структурой алгебраического многообразия, для которого действие $G : G/H$ является регулярным. Многообразие G/H квазипроективно, и, поскольку действие $G : G/H$ транзитивно, гладко. Кроме того, $K[G/H] = K[G]^H$. Если подгруппа H нормальна, то G/H является алгебраической группой.

Пусть g — некоторый элемент из G. Оказывается, что следующие условия эквивалентны:

(1) Образ элемента g при некотором точном (конечномерном, регулярном) представлении полупрост (соотв. унипотентен).
(2) Образ элемента g является полупростым (соотв., унипотентным) при любом представлении.

Элемент $g \in G$ называется полупростым (соотв. унипотентным), если выполнено соответствующее из двух эквивалентных условий. Аналогичное утверждение имеет место и для касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G (с заменой слова "унипотентный" на "нильпотентный", рассматриваемые представления — дифференциалы представлений соответствующей алгебраической группы).

Упражнение 6. Покажите, что полупростой (соотв., унипотентный,) элемент переходит при гомоморфизме в полупростой (соотв., унипотентный,) элемент. Какой аналог этого утверждения для алгебр Ли алгебраических групп?

Алгебраическая группа G, у которой все элементы унипотентны называется унипотентной. Пример доставляет группа всех строго верхнетреугольных матриц. Оказывается, что любая унипотентная подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ переводится сопряжением в подгруппу группы верхнетреугольных матриц. Это следует из теоремы Энгеля из теории алгебр Ли. Таким образом, любое представление унипотентной группы имеет неподвижный вектор.

Перейдем к разрешимым группам. Пример разрешимой алгебраической группы доставляет подгруппа верхнетреугольных матриц. Фундаментальным фактом для теории алгебраических групп является следующее утверждение.

Предложение 12. *Для действия связной разрешимой алгебраической группы на проективном алгебраическом многообразии существует неподвижная точка.*

Следствие 13. *Для линейного представления связной разрешимой группы существует собственный вектор.*

Доказательство. Рассмотреть индуцированное действие на проективном пространстве. $\square$

Следствие 14. *Пусть B — максимальная связная разрешимая алгебраическая подгруппа в G, а H — алгебраическая подгруппа в G, для которой однородное пространство G/H проективно. Тогда $gBg^{-1} \subset H$ для некоторого $g \in G$.*

Упражнение 7. Докажите.

Пусть G — алгебраическая подгруппа. *Борелевской подгруппой* в G называется максимальная связная алгебраическая разрешимая подгруппа в G.

Предложение 15. *Пусть B — некоторая борелевская подгруппа в G.*

(1) *Однородное пространство G/B проективно.*
(2) *Любая борелевская подгруппа в G сопряжена с B.*
(3) *Любой элемент в G содержится в некоторой борелевской подгруппе.*

Соответственно, борелевской подалгеброй в $\mathfrak{g}$ называется максимальная разрешимая подалгебра в G. Это касательная алгебра борелевской подгруппы. Для борелевских подалгебр имеет место аналог предложения 15.

3. Комментарии по поводу литературы

Доказательство теоремы Дарбу-Вейнстейна взято из [2].

Существует множество руководств по алгебраической геометрии. Особой симпатией автора пользуется обзор [3]. По поводу алгебраических групп читатель отсылается к [4], гл.3.

Литература

[1] Н. Бурбаки. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
[2] A. Cannas Da Silva. Lectures on symplectic geometry. LNM 1764, Springer Verlag, Berlin, 2001.
[3] В.И. Данилов, Алгебраические многообразия и схемы. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 23. М.: ВИНИТИ, 1989.
[4] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, М.; УРСС, 1995.