ЛЕКЦИЯ 8

Содержание

1. Напоминание: редуктивные алгебраические группы 1
1.1. Различные определения редуктивности 1
1.2. Структурная теория 1
1.3. Связь между редуктивными и компактными группами 3
1.4. Представления редуктивных групп 3
1.5. Параболические подгруппы и флаговые многообразия 4
2. Теория инвариантов. Факторы 6
3. Комментарии по поводу литературы 7
Литература 7

1. Напоминание: редуктивные алгебраические группы

1.1. **Различные определения редуктивности.** Произвольная алгебраическая группа имеет наибольшую унипотентную нормальную подгруппу, называемую *унипотентным радикалом.* Если унипотентный радикал группы G тривиален, то группа G называется *редуктивной.*

Скажем, полупростая алгебраическая группа и алгебраический тор доставляют примеры редуктивных алгебраических групп. Произведение редуктивных алгебраических групп редуктивно. Нормальная подгруппа и фактор-группа редуктивной группы редуктивны. Группа редуктивна тогда и только тогда, когда её компонента единицы редуктивна.

Алгебраическая группа называется *линейно-редуктивной*, если любое её (конечномерное, регулярное) представление вполне приводимо.

Предложение 1. *Следующие утверждения эквивалентны (напомним, что основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел):*

1. *Группа G редуктивна.*
2. *Группа G линейно-редуктивна.*
3. *У группы G найдется (локально) точное вполне-приводимое представление.*
4. *Найдется представление V группы G, для которого форма $(\xi,\eta) = \mathrm{tr}_V(\xi\eta)$ невырождена на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.*

Упражнение 1. Алгебра Ли редуктивной группы редуктивна, т.е. является прямой суммой коммутативной алгебры Ли (своего центра) и полупростой алгебры (своего коммутанта).

1.2. **Структурная теория.** Во-первых, на касательной алгебре алгебраического тора $\mathbb{C}^{*n}$ имеется естественная рациональная структура. Она вводится также, как и на касательной алгебре компактного тора (лекция 5, п.1.2). Под характером тора $\mathbb{C}^{*n}$ понимается гомоморфизм $\mathbb{C}^{*n} \to \mathbb{C}^*$. Все свойства, указанные в лекции 5, переносятся (с естественными оговорками). Отметим лишь следующее: компактный тор T^n вкладывается в $\mathbb{C}^{*n}$ как подмножество, состоящее из всех наборов, элементы которых имеют модуль 1. При этом вложении касательная алгебра тора T^n состоит из мнимых элементов в $\mathbb{C}^n \cong \mathrm{Lie}(\mathbb{C}^{*n})$. Отметим, наконец, что при представлении тора $\mathbb{C}^{*n}$ все рациональные (соотв. вещественные) элементы из $\mathbb{C}^n$ имеют рациональные (соотв., вещественные) собственные значения.

Структурная теория редуктивных алгебраических групп параллельна структурной теории компактных групп Ли (объяснение этот феномен получит в следующем пункте).

Предложение 2. *Все максимальные торы в произвольной алгебраической группе G сопряжены, их касательные алгебры суть в точности максимальные коммутативные подалгебры в $\mathfrak{g}$, состоящие из полупростых элементов (т.н. картановские подалгебры).*

Размерность максимального тора группы G называется её *рангом* и обозначается через $\operatorname{rk} G$.

Фиксируем максимальный тор $T \subset G$ и его алгебру Ли $\mathfrak{t}$. Имеет место корневое разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{t}(\mathbb{Q})^* \setminus 0} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Выберем инвариантную симметрическую билинейную форму вида, указанного в предложении 1. Ограничение этой формы на $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ является скалярным произведением. Скалярное произведение двух рациональных элементов рационально.

Множество $\{\alpha \in \mathfrak{t}(\mathbb{Q})^* | \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$ конечно и составляет приведенную систему корней, которая называется системой корней группы G и обозначается через $\Delta(G)$. Как и в компактном случае, $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Выберем ненулевые элементы $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha$. Мы можем нормировать элементы $e_\alpha, e_{-\alpha}$ таким образом, чтобы $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ (здесь мы отождествили $\mathfrak{t}(\mathbb{R})^*$, $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$ посредством скалярного произведения).

Отметим, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Delta(G)$.

Предположим теперь, что группа G связна. Для группы Вейля системы корней $\Delta(G)$ имеет место равенство $W = N_G(T)/T$. Любой полупростой элемент ξ с вещественными собственными значениями на любом представлении группы G сопряжен при действии группы G единственному элементу из камеры Вейля $C \subset \mathfrak{t}(\mathbb{R})$.

В качестве приложения нашей структурной теории опишем борелевскую подалгебру в $\mathfrak{g}$. Выберем подсистему положительных корней $\Delta_+ \subset \Delta$.

Упражнение 2. Подалгебра $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ является борелевской подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

В частности, размерность борелевской подгруппы равняется $\frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{rk} \mathfrak{g}}{2}$.

Подалгебра $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ является унипотентной (т.е. алгеброй Ли унипотентной группы). Более того, это максимальная унипотентная подгруппа.

Упражнение 3. Все максимальные унипотентные подалгебры в $\mathfrak{g}$ сопряжены.

Упражнение 4. Пусть B — борелевская подгруппа в G, соответствующая подалгебре $\mathfrak{b}$ построенной выше. Тогда алгебра Ли унипотентного радикала B_u группы B совпадает с $\mathfrak{n}$, и $B = T \leftthreetimes B_u$.

Все унипотентные группы связны. Поэтому все максимальные унипотентные подгруппы в G также сопряжены.

В заключение, сделаем несколько замечаний по поводу глобальной структуры алгебраических групп:

Предложение 3. *Любая полупростая комплексная группа Ли снабжается естественной структурой алгебраической группы (редуктивной, как следует из предложения 1). Произвольная редуктивная группа есть фактор по конечной центральной подгруппе прямого произведения тора и односвязной полупростой группы.*

1.3. **Связь между редуктивными и компактными группами.** Рассмотрим вопрос о компактных (вещественных) подгруппах в алгебраических группах.

Пусть G — алгебраическая группа, K — её компактная подгруппа, а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — соответствующие подалгебры. Рассмотрим точное представление V алгебраической группы G. Пусть G_u — унипотентный радикал группы G, $\mathfrak{g}_u$ — его алгебра Ли. Алгебра $\mathfrak{k}$ представлена косоэрмитовыми операторами, а алгебра $\mathfrak{g}_u$ — нильпотентными. Поэтому $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_u = \{0\}$. Аналогично, $K \cap G_u = \{e\}$. Таким образом, гомоморфизм $K \to G/G_u$ инъективен. Далее, отметим, что $\mathfrak{k} \cap i\mathfrak{k} = \{0\}$, ибо $i\mathfrak{k}$ представляется эрмитовыми операторами. Отсюда делаем вывод, что сумма $\mathfrak{k}(\mathbb{C}) = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$ прямая. В частности, $\dim K \leqslant (\dim G - \dim G_u)/2$.

$\mathfrak{k}(\mathbb{C})$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Существует эрмитова форма на V инвариантная относительно K. Поэтому форма $(\xi, \eta) = \mathrm{tr}(\xi\eta)$ отрицательно определена на $\mathfrak{k}$. Отметим, далее, что $(\xi, i\eta) = 0$ (докажите). Поэтому форма $(\cdot, \cdot)$ невырождена на $\mathfrak{k}(\mathbb{C})$. Соответствующая связная подгруппа $G_0 \subset G$ является редуктивной алгебраической подгруппой в G.

Дадим важное определение:

Определение 4. Подгруппа $K \subset G$ называется *компактной формой* группы G, если выполнены два следующих условия:

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(\mathbb{C})$.
(2) K пересекает все связные компоненты группы G.

Очевидно, что для компактной формы K и $g \in G$ подгруппа gKg^{-1} также является компактной формой.

Если группа G допускает компактную форму, то она редуктивна. Оказывается, что верно и обратное:

Теорема 5. *Любая редуктивная алгебраическая группа G обладает компактной формой. Любая компактная подгруппа в G сопряжена подгруппе в компактной форме. В частности, любые две компактные формы сопряжены.*

Упражнение 5. Докажите эту теорему в случае $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Упражнение 6. Пусть $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k$ — редуктивные группы. Тогда найдутся компактные формы $K_i \subset G_i$, для которых $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_k$.

Можно дать частичное описание касательной алгебры компактной формы. Именно, рассмотрим корневое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta(G)} \mathfrak{g}_\alpha$ и систему положительных корней Δ_+. Оказывается, что можно так выбрать ненулевые векторы $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, что

$$\mathfrak{k} = i\mathfrak{t}(\mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \langle i(e_\alpha + e_{-\alpha}), e_\alpha - e_{-\alpha} \rangle$$

является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Оказывается, что найдется компактная форма $K \subset G$ с касательной алгеброй $\mathfrak{k}$.

Упражнение 7. Реализуйте этот план в случае $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1.4. **Представления редуктивных групп.** Мы рассматриваем конечномерные регулярные представления редуктивных групп. Как мы видели выше, все такие представления вполне приводимы. Поэтому достаточно описать неприводимые представления. Ниже для связной алгебраической группы G через $\mathfrak{X}(G)$ обозначена решетка характеров группы G, т.е гомоморфизмов $G \to \mathbb{C}^*$.

Итак, пусть G — связная редуктивная группа, T — максимальный тор, $\Delta(G)$ — система корней, Δ_+ — система положительных корней, $\mathfrak{b}, B$ — соответствующие борелевские подалгебра и подгруппа. Пусть V — G-модуль.

Согласно следствию 13 предыдущей лекции, в V существует B-полуинвариантный вектор v. Такой вектор называется *старшим*. Этот вектор определяет характер тора T, которым T действует на $\langle v\rangle$. Этот характер называется *старшим весом* G-модуля V. Его можно также рассматривать, как элемент из $\mathfrak{t}(\mathbb{Q})^*$.

Пусть λ — старший вес модуля V. Оказывается, что он удовлетворяет следующему условию: для всех $\alpha \in \Delta_+$ имеет место неравенство $\langle\lambda,\alpha\rangle \geqslant 0$. При выполнении указанных неравенств говорят, что вес λ *доминантен*.

Предположим теперь, что модуль V неприводим. Возникает вопрос: сколько непропорциональных старших векторов может быть в неприводимом G-модуле. Оказывается, что всего один. Действительно, пусть v — старший вектор. Модуль V совпадает с линейной комбинацией мономов $\xi_1\ldots\xi_k v$, $k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \xi_i\in\mathfrak{g}$. Несложно показать, что можно брать мономы не из всей $\mathfrak{g}$, а лишь из $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Отсюда уже несложно следует требуемое. Кроме того, отсюда следует, что все T-веса в неприводимом G-модуле V со старшим весом λ получаются из λ вычитанием некоторой суммы положительных корней.

Основной теоремой в теории неприводимых представлений редуктивных групп является

Теорема 6. *Для любого доминантного веса $\lambda\in\mathfrak{X}(T)$ существует единственный неприводимый G-модуль $V(\lambda)$ со старшим весом λ.*

Упражнение 8. Докажите существование для $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Рассмотрим односвязную полупростую группу Ли G. Обозначим через $Q^\vee$ дуальную корневую решетку в $\mathfrak{t}$, т.е. решетку порожденную элементами $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ с $\alpha\in\Delta(G)$ (можно проверить, что элементы $\alpha^\vee$ также составляют систему корней, называемую *дуальной системой корней*). Положим $P = \{\lambda\in\mathfrak{t}^* | \langle\alpha,\lambda\rangle\in\mathbb{Z}\}$. Это т.н. решетка весов алгебры $\mathfrak{g}$. Оказывается, что $P=\mathfrak{X}(T)$.

Пусть теперь G — произвольная редуктивная группа. Обозначим через G_0 — односвязную накрывающую коммутанта (G,G). Тогда имеем накрытие $G_0\times Z(G)^\circ\to G$ с ядром Γ. Пусть $\widetilde{T}$ — максимальный тор, лежащий над $T\subset G$. Можно показать, что $\Gamma\subset\widetilde{T}$. Решетка $\mathfrak{X}(T)$ отождествляется с подрешеткой в $\mathfrak{X}(\widetilde{T})$, состоящей из характеров, аннулирующихся на Γ.

1.5. **Параболические подгруппы и флаговые многообразия.** В этом пункте G — связная алгебраическая группа.

Определение 7. Алгебраическая подгруппа $P\subset G$ называется *параболической*, если P содержит борелевскую подгруппу, или, что эквивалентно, многообразие G/P проективно (или компактно).

Предложение 8. *Любая параболическая подгруппа связна. Её нормализатор в G совпадает с ней самой.*

Пусть T, B, Δ_+ выбраны как выше. Пусть P — параболическая подгруппа. Заменив P на сопряженную подгруппу, можем считать, что $B\subset P$. Пусть $\mathfrak{p}$ — касательная алгебра группы P. Поскольку $\mathfrak{p}$ является T-инвариантной, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Delta(P)}\mathfrak{g}_\alpha$, где $\Delta(P)$ есть некоторое подмножество в $\Delta(G)$. Поскольку $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}$, то $\Delta_+\subset\Delta(P)$. Поскольку $\mathfrak{p}$ является подалгеброй, то для $\alpha,\beta\in\Delta(P)$ включение $\alpha+\beta\in\Delta(G)$ влечет $\alpha+\beta\in\Delta(P)$.

Подмножество Σ в системе корней Δ мы будем называть *параболическим*, если выполнены следующие условия:

(1) $\Delta_+\subset\Sigma$.
(2) $(\Sigma+\Sigma)\cap\Delta\subset\Sigma$.

Существует простой рецепт получать параболические подмножества. Именно, рассмотрим систему простых корней Π, соответствующую Δ_+, и выберем из неё подмножество Π_0. Подмножество $\Sigma(\Pi_0) = \Delta_+ \cup (\mathbb{Z}_{\leqslant 0}\Pi_0 \cap \Delta)$ является параболическим. Обратно, любое параболическое подмножество в Δ имеет такой вид.

Задача 9. Попытайтесь доказать это. Если не будет получаться, ограничьтесь случаем системы корней типа A_n.

Параболическую подгруппу с $\Delta(P) = \Sigma(\Pi_0)$ можно реализовать так. Найдется доминантный вес $\pi \in \mathfrak{X}(T)$, для которого $\{\alpha \in \Pi | \langle \pi, \alpha^\vee \rangle = 0\} = \Pi_0$. Рассмотрим неприводимый модуль $V(\pi)$ и его старший вектор v_π. Тогда $P = G_{\langle v_\pi \rangle}$ является требуемой параболической подгруппой. Множество $\Delta(P)$ совпадает с $\{\alpha \in \Delta | (\alpha, \pi) \geqslant 0\}$.

Подгруппа в P с касательной алгеброй $\bigoplus_{\alpha,(\alpha,\pi)>0} \mathfrak{g}_\alpha$ будет унипотентным радикалом группы P. Подгруппа L с касательной алгеброй $\mathfrak{l} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha,(\alpha,\pi)=0} \mathfrak{g}_\alpha$ является максимальной редуктивной подгруппой в P. Имеет место равенство $P = L \leftthreetimes P_u$. L называется подгруппой Леви. Как и в компактном случае, это централизатор некоторого полупростого элемента из $\mathfrak{g}$, например, соответствующего π при изоморфизме $\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^*$.

Выберем теперь компактную форму K группы G, построенную как в предыдущем пункте. Мы видим, что для $\mathfrak{l}_K = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ выполняется равенство $\mathfrak{l}_K(\mathbb{C}) = \mathfrak{l}$. Подгруппа $P \cap K$ является компактной формой для L. Это подгруппа Леви в K.

Упражнение 10. Докажите утверждения предыдущего абзаца для случая $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Определение 9. Однородное пространство G/P называется флаговым многообразием.

Предложение 10. *Подгруппа K действует транзитивно на G/P. Стабилизатор точки eP совпадает с L_K. Таким образом, G/P является (ко)присоединенной орбитой для K.*

Доказательство. Утверждение про стабилизатор следует из определения группы L_K. Как следует из предыдущего обсуждения $\dim K - \dim L_K = \dim G/P$. Поскольку многообразие G/P компактно, это дает требуемое. $\square$

Обсудим теперь вложения флаговых многообразий в проективные пространства. Нас будут интересовать эквивариантные вложения в проективизации неприводимых модулей. Именно, выберем старший вес $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$. Пусть $V(\lambda)$ — соответствующий G-модуль, а v_λ — старший вектор. Имеем отображение (морфизм алгебраических многообразий) $G/B \to \mathbb{P}(V(\lambda))$, $gB \mapsto [gv_\lambda]$. Это отображение есть композиция проекции $G/B \to G/G_{\langle v_\lambda \rangle}$ и вложения $G/G_{\langle v_\lambda \rangle} \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\lambda))$. Последнее является G-эквивариантным вложением алгебраических многообразий. Его образ мы будем обозначать через $\mathcal{O}_\lambda$.

Упражнение 11. Пусть $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \lambda = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k$ (см. лекцию 5, упражнение 4). Тогда $G/G_{\langle v_\lambda \rangle}$ есть грассманиан, а рассматриваемое вложение — вложение Плюккера. Что есть вложение, соответствующее весу $d\varepsilon_1$? Как задать в рамках указанной конструкции вложение Сегре.

Рассмотрим вопрос о том, как устроено однородное координатное кольцо подмногообразия $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathbb{P}(V(\lambda))$ как G-модуль.

Предложение 11. *Имеет место равенство G-модулей $\mathbb{C}_h[\mathcal{O}_\lambda]_k = V(k\lambda)^*$.*

Доказательство. Рассмотрим k-кратное вложение $\varphi : \mathcal{O}_\lambda \hookrightarrow \mathbb{P}(S^k V(\lambda))$. Вектор $v_\lambda^k \subset S^k V(k\lambda)$ есть единственный вектор с весом $k\lambda$. Веса остальных векторов меньше (т.е. получаются из $k\lambda$ вычитанием положительных корней). Таким образом, имеем вложение $V(k\lambda) \hookrightarrow S^k V(\lambda)$ с однозначно определенным образом. Отметим, что $Gv_\lambda^k \subset V(k\lambda)$. Иными словами, $\varphi(\mathcal{O}_\lambda) \subset \mathbb{P}(V(k\lambda))$. Таким образом, имеем эпиморфизм $V(k\lambda)^* \to$

$\mathbb{C}_h[X]_k$. Равенство следует теперь из нетривиальности $\mathbb{C}_h[\mathcal{O}_\lambda]_k$ и неприводимости $V(k\lambda)^*$. $\square$

2. Теория инвариантов. Факторы

Теория инвариантов занимается изучением действий алгебраических групп на алгебраических многообразиях.

В частности, ставится задача параметризации орбит на многообразии. Иными словами, пусть G — алгебраическая группа, а X — алгебраическое G-многообразие. Хочется найти алгебраическое многообразие Y, точки которого некоторым естественным образом параметризовали бы орбиты. Последнее логично понимать как наличие G-инвариантного морфизма $\pi : X \to Y$, слоями которого являются в точности орбиты. К сожалению, такое многообразие Y не всегда существует (вернее, почти никогда не существует). Счастливое исключение: $X = \widetilde{G}$, G — подгруппа в $\widetilde{G}$, действующая на X умножениями справа. Тогда можно взять $Y = \widetilde{G}/G$.

Рассмотрим ситуацию, когда X аффинно. Поставим задачу отыскания "наибольшего" *аффинного* многообразия Y, для которого существует G-инвариантный доминантный морфизм $\pi : X \to Y$. "Наибольшесть" надо понимать так: для любого аффинного многообразия Y_1 и G-инвариантного морфизма $\pi_1 : X \to Y_1$ существует морфизм $\varphi : Y \to Y_1$, для которого $\pi_1 = \varphi \circ \pi$. Поскольку $\pi_1^*(K[Y]) \subset K[X]^G$, то алгеброй функций многообразия Y должна быть алгебра $K[X]^G$, а морфизм π должен индуцироваться вложением $K[X]^G \hookrightarrow K[X]$.

Имеется одна проблема: алгебра $K[X]^G$ может быть не конечно-порождена. В одном важном частном случае этой проблемы не возникает.

Теорема 12. *Пусть группа G линейно редуктивна. Тогда алгебра $K[X]^G$ конечно порождена.*

Это базовое для теории инвариантов утверждение носит название теоремы Гильберта об инвариантах.

Многообразие, соответствующее алгебре $K[X]^G$ называется *категорным фактором* и обозначается через $X/\!/G$. Соответствующий морфизм $\pi : X \to X/\!/G$ называется *морфизмом (категорной) факторизации.*

Этот морфизм обладает следующими замечательными свойствами:

Предложение 13. *Образ замкнутого G-инвариантного подмногообразия $Y \subset X$ в $X/\!/G$ замкнут и отождествляется с $Y/\!/G$. В частности, морфизм факторизации сюръективен.*

Предложение 14. *Каждый слой морфизма факторизации содержит в точности одну замкнутую орбиту.*

Иными словами, категорный фактор параметризует замкнутые орбиты для действия $G : X$.

Задача 12. Пусть Y, Z — замкнутые, не пересекающиеся, G-инвариантные подмногообразия в X. Докажите, что найдется многочлен $f \in K[X]^G$ равный нулю на Y и отличный от нуля на Z (можно потребовать дополнительно равенства f единице на Z). Для доказательства воспользуйтесь локальной конечностью G-модуля $K[X]$ (см. п. 2.2 лекции 7). Выведите отсюда утверждение предложения 14.

Пример 15. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, а H — её редуктивная алгебраическая подгруппа, действующая на G умножениями справа. Тогда $G/\!/H = G/H$. В частности, однородное пространство G/H аффинно. В следующей лекции мы увидим, что верно и обратное: если однородное пространство G/H аффинно, а G редуктивна, то подгруппа H редуктивна.

Рассмотрим теперь вопрос о построении фактора для действий на проективных многообразиях. Будем рассматривать следующую ситуацию: группа G действует линейно на векторном пространстве V, $X \subset \mathbb{P}(V)$ — замкнутое G-инвариантное подмногообразие. Имеем (конечно-порожденную) однородную координатную алгебру $\mathbb{C}_h[X]$. На ней имеется действие группы G автоморфизмами. Подалгебра инвариантов $\mathbb{C}_h[X]^G$ однородна и конечно-порождена. Последнее следует из теоремы 12. Таким образом, алгебре $\mathbb{C}_h[X]^G$ сопоставляется проективное многообразие $Y = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}_h[X]^G)$. Это делается так: для некоторого d компонента $\mathbb{C}_h[X]^G_d$ порождает алгебру $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathbb{C}_h[X]^G_{dk}$. $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}_h[X]^G)$ — вложенное проективное многообразие, соответствующее этой алгебре.

Имеется, впрочем, проблема: морфизма $X \to Y$, вообще говоря, не существует. Действительно, как естественное строить такой морфизм? Рассмотрим базис $f_1, \ldots, f_k$ в $\mathbb{C}_h[Y]_1$ и положим $[v] \mapsto [f_1(v) : \ldots : f_k(v)]$. Это корректно определенный морфизм, но лишь на некотором открытом подмножестве в X, а именно, на дополнении к совместному множеству нулей многочленов $f_1, \ldots, f_k$. Это совместное множество нулей называется множеством *нестабильных* точек (обозначается X^{us}), а его дополнение — множеством *полустабильных* точек (обозначается X^{ss}).

Упражение 13. Множество полустабильных точек и соответствующий морфизм $X^{ss} \to Y$ не зависит от выбора d выше. X^{us} есть проективизация пересечения аффинного конуса над X и конуса N в V, который задается обращением в 0 всех элементов из $\mathbb{C}[V]^G$ без свободного члена (т.н. нуль-конуса).

Многообразие Y называется *фактором Мамфорда* для действия $G : X$ и обозначается через $X^{ss}//G$.

3. Комментарии по поводу литературы

Большая часть материала раздела 1 может быть найдена в [1], гл. 4,5.

Доказательство теоремы Гильберта, как и ещё много полезного про категорный фактор, можно посмотреть в [2]. Стандартным источником по теории инвариантов является обзор [3].

Литература

[1] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик, Семинар по группам Ли и алгебраическим группам, М.; УРСС, 1995.
[2] Х. Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов. М.:Мир, 1987, 312с.
[3] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989, 137-309.