ЛЕКЦИЯ 9

Содержание

1. Теорема Кемпфа-Несс

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, действующая на (комплексном) векторном пространстве V, K — её компактная форма. Фиксируем K-инвариантное эрмитово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Теорема 1. *Для $v \in V$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *Орбита Gv замкнута.*
(2) *Существует вектор $v_1 \in Gv$, для которого $\langle \xi v_1, v_1\rangle = 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{g}$.*

При этом v_1, удовлетворяющий условию (2), определен однозначно с точностью до K-сопряженности и есть вектор минимальной длины в Gv.

Замечание 2. Условие (2) эквивалентно условию $\langle \xi v, v\rangle = 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{k}$ или условию $\langle \xi v, v\rangle$ для всех $\xi \in i\mathfrak{k}$, поскольку $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{k}$.

1.1. Предварительные сведения.

Следующий факт носит название "разложения Картана".

Предложение 3. *Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, $T \cong \mathbb{C}^{*n}$ — максимальный тор в G, а K — компактная форма с касательной алгеброй $\mathfrak{k}$ построенной в пункте 1.3 предыдущей лекции. Обозначим через A подгруппу $\mathbb{R}^{*n}_{>0} \subset \mathbb{C}^{*n}$ (контрольный вопрос: почему это определение не зависит от отождествления $T \cong \mathbb{C}^{*n}$). Имеем отображение $K \times A \times K, (k_1, t, k_2) \mapsto k_1 t k_2$. Это отображение сюръективно (и является диффеоморфизмом для связной G).*

Упражнение 1. Докажите это утверждение в случае $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Фундаментальным фактом при изучении замыканий орбит редуктивных групп на аффинных многообразиях является следующая теорема. Элементарное доказательство, принадлежащее Ричардсону и Бирксу, см. в [1].

Теорема 4. *Пусть редуктивная группа G действует на аффинном алгебраическом многообразии X. Пусть $x \in X$ и y — некоторая точка из (единственной) замкнутой орбиты, лежащей в $\overline{Gx}$. Тогда существует однопараметрическая подгруппа $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$, для которой $\lim_{t\to 0} \lambda(t)x = y$. Более того, для фиксированной компактной формы K можно выбрать такую λ с $\lambda(\mathbb{S}^1) \subset K$.*

1.2. **Доказательство теоремы.** Сначала легкая часть. Покажем, во-первых, что векторы минимальной длины из Gv удовлетворяют условию (2). Это немедленно даст импликацию (1) $\Rightarrow$ (2) (достаточно рассмотреть пересечение орбиты Gv с замкнутым шаром и воспользоваться теоремой о достижении минимума непрерывной функции на компакте).

Действительно, пусть v_1 — вектор, доставляющий минимум функции $\langle gv_1, gv_1\rangle$, $g \in G$. Продифференцировав, получаем, что

$$\langle \xi v_1, v_1\rangle + \langle v_1, \xi v_1\rangle = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}. \tag{1.1}$$

Отметим, что $\xi \in i\mathfrak{k}$ представляется в V эрмитовым оператором, стало быть $\langle \xi v_1, v_1\rangle = \langle v_1, \xi v_1\rangle$. Поэтому из (1.1) выводим

$$\langle \xi v, v\rangle = 0, \forall \xi \in i\mathfrak{k}. \tag{1.2}$$

Согласно замечанию (2), (1.2) эквивалентно в условию (2).

Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1) значительно сложнее. Мы считаем, что максимальный тор T в G выбран так, чтобы подгруппа $T \cap K$ была максимальным тором в K. Нам потребуется следующая лемма:

Лемма 5. *Различные весовые подпространства относительно $T \cap K$ (или $T_K(\mathbb{C}) = T$) будут ортогональны относительно $\langle \cdot, \cdot\rangle$.*

Напомним, что для характера χ группы T весовым подпространством, отвечающим χ, называется

$$V_\chi := \{v \in V | tv = \chi(t)v, \forall t \in T.$$

Доказательство леммы 5. Для $\chi, \psi \in \mathfrak{X}(T)$ и $v_\chi \in V_\chi, v_\psi \in V_\psi, t \in T \cap K$ имеем

$$\langle v_\chi, v_\psi\rangle = \langle tv_\chi, tv_\psi\rangle = \chi(t)\overline{\psi(t)}\langle v_\chi, v_\psi\rangle = (\chi - \psi)(t)\langle v_\chi, v_\psi\rangle.$$

Если $\chi \neq \psi$, то $\langle v_\chi, v_\psi\rangle = 0$. □

Пусть v — произвольный вектор в V, а A обозначает то же, что в предложении 3. Отметим, что для любого $g \in A$ найдется $\xi \in \mathrm{Lie}(A)$ с $g = \exp(\xi)$. Выберем $\xi \in \mathrm{Lie}(A) = \mathfrak{t}(\mathbb{R})$ и рассмотрим функцию $f_{\xi,v}(t) = \langle \exp(t\xi)v, v\rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Найдем $f''_{\xi,v}(t)$. Для этого запишем весовое разложение $v = \sum_\lambda v_\lambda$ (относительно T).

$$f''_{\xi,v}(t) = \frac{d}{dt_1}|_{t_1=0}\langle \xi^2 \exp(t\xi)v_1, v_1\rangle = \sum_\lambda \langle \lambda, \xi\rangle^2 \exp^{t\langle \lambda,\xi\rangle} ||v_\lambda||^2. \tag{1.3}$$

Отметим, что $\langle \lambda, \xi\rangle \in \mathbb{R}$, поэтому все слагаемые в правой части равенства (1.3) неотрицательны. Значит, $f''_{\xi,v}(t) > 0$ для всех t, если $\xi v \neq 0$ и $f''_{\xi,v}(t) = 0$ для всех t в противном случае.

Заметим теперь, что поскольку ξ — эрмитов оператор, то и оператор $\exp(t\xi)$ эрмитов для всех t. Поэтому

Поэтому

$$f'_{\xi,v}(t) = \langle \xi \exp(t\xi)v, v\rangle = \langle \xi \exp(\frac{t\xi}{2})v, \exp(\frac{t\xi}{2})v\rangle. \tag{1.4}$$

В частности, если $\exp(t\xi)v$ удовлетворяет условию (2), то $f'_{\xi,v}(2t) = 0$.

Докажем импликацию (2) $\Rightarrow$ (1). Выберем вектор $v_1 \in Gv$, для которого $\langle \mathfrak{g}v_1, v_1\rangle = 0$. Отметим, что из K-инвариантности метрики $\langle \cdot, \cdot\rangle$ следует, что векторы $v_1, kv_1, k \in K$, одновременно удовлетворяют или не удовлетворяют условию (2). Согласно теореме Гильберта-Мамфорда, нам будет достаточно доказать, что для произвольной однопараметрической подгруппы $\lambda : \mathbb{C}^* \to G$ с $\lambda(\mathbb{S}^1) \in K$ предел $\lim_{t\to 0} \lambda(t)v_1$ не существует или совпадает с v_1. Пусть $\xi = d_e\lambda(1)$. Это вектор в $\mathfrak{g}$, для которого $i\xi \in \mathfrak{k}$. Отметим, что $\lambda(e^t) = \exp(\xi t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Заменив v_1 на kv_1, ξ на $\mathrm{Ad}(k)\xi$ для подходящего

$k \in K$, можем считать, что $\xi \in \mathfrak{t}(\mathbb{R})$. Рассмотрим функцию $f_{\xi,v_1}(t)$. Её производная в нуле равна 0, и она строго выпукла, если $\xi v \neq 0$. Значит, если $\xi v \neq 0$, то $\lim_{t\to\infty} f_{\xi,v_1}(t) = +\infty$. Это противоречит существованию предела.

Нам остается доказать, что векторы v_1, удовлетворяющие условию (2) сопряжены элементом из K. Для этого, опять таки, ввиду разложения Картана, достаточно доказать, что если v_1 удовлетворяет условию (2), то $\exp(\xi)v_1$ не удовлетворяет этому условию для $\xi \in \mathfrak{t}(\mathbb{R}), \xi v_1 \neq 0$. От противного. Пусть $v_1, \exp(\xi)v_1$ удовлетворяют (2). Тогда $f_{\xi,v_1}(t)$ — строго выпуклая функция с $f'_{\xi,v_1}(0) = f'_{\xi,v_1}(1/2) = 0$. Противоречие.

Теорема доказана.

1.3. **Связь с гамильтоновыми действиями.** Пусть, как и выше, G — редуктивная группа, линейно действующая в пространстве V, K — компактная форма группы G, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — эрмитово скалярное произведение на V. Как и в пункте 1 лекции 2, имеем симплектическую форму $\omega = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\langle\cdot,\cdot\rangle$. Это линейная K-инвариантная линейная симплектическая форма на V. Таким образом, действие $K : V$ гамильтоново, отображение моментов задается по формуле (см. лекцию 3, пример 14)

$$\langle\mu(v),\xi\rangle = \frac{1}{2}\omega(\xi v, v) = -\frac{1}{4}\operatorname{Im}\langle\xi v, v\rangle = -\frac{1}{4}\langle\xi v, v\rangle. \tag{1.5}$$

Последнее равенство выполняется, поскольку $\mathfrak{k}$ представляется косоэрмитовыми операторами.

Имеем следующее следствие из теоремы Кемпфа-Несс (а точнее, переформулировку её части)

Предложение 6. *G-орбита вектора $v \in V$ замкнута тогда и только тогда $Gv \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$. Для замкнутого G-инвариантного подмногообразия X Отображение $(X \cap \mu^{-1}(0))/K \to X/\!/G$, индуцированное вложением $X \cap \mu^{-1}(0) \to X$, биективно.*

Доказательство. Для доказательства второго утверждения надо вспомнить, что каждый слой морфизма факторизации $X \to X/\!/G$ содержит единственную замкнутую орбиту (предложение 14 лекции 8). □

Рассмотрим теперь действие $K : \mathbb{P}(V)$. Это действие также гамильтоново, см. задачу 3 лекции 2, примеры 19, 20 лекции 3, пример 11 лекции 4. Отображение моментов задается формулой

$$\langle\mu([v]),\xi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\frac{\langle\xi v, v\rangle}{\langle v, v\rangle}. \tag{1.6}$$

Предложение 7. *Пусть X — замкнутое G-инвариантное подмногообразие в $\mathbb{P}(V)$. Точка $x \in X$ полустабильна тогда и только тогда, когда $Gx \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset$. Отображение $(\mu^{-1}(0) \cap X)/K \to X^{ss}/\!/G$ биективно.*

Это предложение допускает одно весьма интересное следствие

Следствие 8. *В обозначениях предыдущего предложения $X \cap \mu^{-1}(0)$ связно, если X — неприводимо.*

Доказательство. Не нарушая общности, можем предположить, что группа G связна. Подпространство $(\mu^{-1}(0) \cap X)$ компактно, а значит и фактор $(\mu^{-1}(0) \cap X)$ таков. Таким образом, $(\mu^{-1}(0) \cap X)/K$ и $X^{ss}/\!/G$ — гомеоморфные топологические пространства. Но X^{ss}/G — неприводимое алгебраическое многообразие, а значит связно в обычной топологии (см. [2], т.2, гл.7, п. 2.2, теорема 1, впрочем, результат выглядит очень убедительно). Отсюда мы заключаем, что фактор $(\mu^{-1}(0) \cap X)/K$ — связное пространство. Поскольку группа K компактна, получаем требуемое. □

Все вышесказанное мотивирует нас на следующее определение:

Определение 9. Пусть X — гамильтоново K-многообразие, где K — компактная группа, μ — отображение моментов. Фактор $\mu^{-1}(0)/K$ называется *симплектической редукцией* многообразия X.

1.4. **Некоторые теоретико-инвариантные следствия.** Следующее утверждение носит название критерия Мацусимы:

Теорема 10. *Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, а H — её алгебраическая подгруппа. Тогда однородное пространство G/H аффинно тогда и только тогда, когда H — редуктивная подгруппа.*

Доказательство. В одну сторону все уже доказано (пример 15 предыдущей лекции). Пусть теперь однородное пространство G/H аффинно. Оно допускает замкнутое вложение в G-модуль V (предложение 10 лекции 7). Выберем в G компактную форму K и эрмитово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть ω — соответствующая симплектическая форма, а $\mu: V\to\mathfrak{k}$ — отображение моментов. Выберем $v\in G/H\cap\mu^{-1}(0)$. Орбита Kv изотропна (по следствию 13 лекции 3). Поэтому $\dim_{\mathbb{R}} Kv\leqslant\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} G/H=\dim_{\mathbb{C}} G/H$ (напомним, что G/H — комплексное подмногообразие в V, и, стало быть, симплектическое). С другой стороны, $\dim_{\mathbb{R}} Kv=\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}-\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}_v=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}-\dim_{\mathbb{R}} k_v$. Поэтому $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{k}_v\geqslant\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_v$. Таким образом, $\dim_{\mathbb{R}} K_v\geqslant\dim_{\mathbb{C}} G_v$. С другой стороны, как мы видели в пункте 1.3. предыдущей лекции, $\dim K_v\leqslant\dim_{\mathbb{C}} G_v-\dim_{\mathbb{C}} G_{v\,u}$. Поэтому $G_{v\,u}=\{e\}$, и группа G_v редуктивна. □

Замечание 11. Отметим, что приведенное выше доказательство использует не всю теорему Кемпфа-Несс, а лишь её легкую часть.

Следующее утверждение носит название "критерий Луны замкнутости орбиты"

Теорема 12. *Пусть G — редуктивная группа, действующая на аффинном алгебраическом многообразии X. Пусть H — редуктивная подгруппа в G и $x\in X^H$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Орбита Gx замкнута.*
(2) *Орбита $N_G(H)x$ замкнута.*

Доказательство. Мы докажем утверждение только в одну (более сложную) сторону, а именно, импликацию (2) ⇒ (1). Для доказательства в другую сторону достаточно показать, что $(Gx)^H$ есть несвязное объединение $N_G(H)$-орбит. Это следует из включения $T_x((Gx)^H)\subset T_x(Gx)^H\subset T_xN_G(H)x$. Последнее имеет место в силу редуктивности H.

Итак, пусть орбита $N_G(H)x$ замкнута. Выберем компактные формы $K_0\subset H, K_1\subset N_G(H), K\subset G$ так, чтобы $K_0\subset K_1\subset K$ (см. упражнение 6 предыдущей лекции). Мы отождествим $\mathfrak{k}$ с $\mathfrak{k}^*$, использовав инвариантное скалярное произведение. Это задает нам отождествление $\mathfrak{k}_1$ с $\mathfrak{k}_1^*$.

Вложим X в G-модуль V. Выберем в V K-инвариантную эрмитово скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть μ — соответствующее отображение моментов. Ограничение метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $V^H=V^{K_2}$ снова является эрмитовой метрикой. Для соответствующего отображения моментов μ_1 имеем равенство

$$\langle\mu_1(v),\xi\rangle=-\frac{1}{4i}\langle\xi v,v\rangle=\langle\mu(v),\xi\rangle, v\in V^H,\xi\in\mathfrak{k}_1. \tag{1.7}$$

Таким образом, μ_1 совпадает с композицией ограничения μ на V^H и ортогональной проекции $\mathfrak{k}\to\mathfrak{k}_1$. Однако, μ является K, в частности, K_0-эквивариантным отображением. Отсюда $\mu(V^H)\subset\mathfrak{k}^{K_2}\subset\mathfrak{k}_1$. Мы видим, что $\mu|_{V^H}=\mu_1$.

Применив теорему Кемпфа-Несс к орбите $N_G(H)x$ видим, что найдется вектор $v\in N_G(H)x\cap\mu_1^{-1}(0)$. Но тогда $v\in\mu^{-1}(0)$. Повторное применение теоремы Кемпфа-Несс завершает доказательство. □

2. Вложения проективных многообразий и симплектические формы

Мы рассмотрели несколько вложений проективных многообразий:

1) Вложения Веронезе и Сегре (лекция 7).

2) Вложение флаговых многообразий для редуктивных групп в проективизации неприводимых модулей.

В первом случае мы имеем на вкладываемом многообразии две формы. Для вложения Сегре, это произведение ограничений форм Фубини-Штуди на гладкие подмногообразия $X \subset \mathbb{CP}^n, Y \subset \mathbb{CP}^n$ и ограничение формы Фубини-Штуди с $\mathbb{CP}^{mn+m+n}$ на $X \times Y$. Аналогично для вложения Веронезе. Хотелось бы описать соотношения между двумя имеющимися формулами. Во втором случае, многообразие является коприсоединенной орбитой компактной группы (предложение 10 предыдущей лекции). Хотелось бы знать, является ли ограничение соответствующей формы Фубини-Штуди формой Костанта-Кириллова, и если да, то какой именно.

Определение формы Фубини-Штуди было дано в разделе 1 лекции 2. Оно зависит от выбора эрмитового скалярного произведения на векторном пространстве. Пусть $X_1 \subset \mathbb{CP}^{n_1}, X_2 \subset \mathbb{CP}^{n_2}$ — гладкие подмногообразия и ω_i — ограничения форм Фубини-Штуди с $\mathbb{CP}^{n_i}$ на $X_i, i = 1, 2$. Пусть далее ω — ограничение формы Фубини-Штуди с $\mathbb{CP}^{nm+n+m}$ на $X_1 \times X_2$.

Предложение 13. *Пусть на $\mathbb{C}^{n_1+1}, \mathbb{C}^{n_2+1}, \mathbb{C}^{n_1n_2+n_1+n_2+1}$ заданы стандартные эрмитовы скалярные произведения (инвариантно: скалярное произведение на $\mathbb{C}^{(n_1+1)(n_2+1)}$ является тензорным произведением скалярных произведений на $\mathbb{C}^{n_1+1}, \mathbb{C}^{n_2+1}$). Тогда $\omega = \pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$, где $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ — проекция.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $X_i = \mathbb{CP}^{n_i}$. Пусть $x_i, y_j, z_{ij}, i = \overline{0, n_1}, j = \overline{0, n_2}$ — однородные координаты на $\mathbb{CP}^{n_1}, \mathbb{CP}^{n_2}, \mathbb{CP}^{n_1n_2+n_1+n_2}$. Мы считаем, что вложение Сегре задано так: $z_{ij} = x_iy_j$. Пусть U_1, U_2, U — открытые подмножества в $\mathbb{CP}^{n_1}, \mathbb{CP}^{n_2}, \mathbb{CP}^{n_1n_2+n_1+n_2}$, заданные условиями $x_0 = 1, y_0 = 1, z_{00} = 1$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$ — сечения расслоений $V \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V)$ для соответствующих проективных многообразий, заданные равенствами $\sigma_1([1 : x_1 : \ldots : x_{n_1}]) = (1, x_1, \ldots, x_n)$ и аналогичными двумя. Тогда $U \cap (X_1 \times X_2) = U_1 \times U_2$ и

$$\begin{aligned}\omega|_{U\cap(X_1\times X_2)} = &\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}\log(||\sigma(x_1, x_2)||^2) = \frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}(\log(||\sigma_1(x_1)||^2) + \log(||\sigma_2(x_2)||^2))\\ =&\pi_1^*(\omega_1|_{U_1}) + \pi_2^*(\omega_2|_{U_2}).\end{aligned}$$

□

Иными словами, форма на произведении гладких вложенных проективных многообразий совпадает с симплектической формой на произведении их же, но как симплектических многообразий.

Ситуация с вложением Веронезе (*d-кратным вложением*) также весьма предсказуема.

Предложение 14. *d-кратное вложение увеличивает симплектическую форму на гладком вложенном симплектическом многообразии в d раз.*

Упражнение 2. Придайте утверждению предыдущего предложения точную форму и докажите его.

Пусть теперь G — связная редуктивная группа с борелевской подгруппой B и максимальным тором $T \subset G$, V — неприводимый модуль со старшим весом λ, K — компактная форма группы G, вложенная как и прежде и $T_K = T \cap K$ — максимальный тор в K.

Имеем вложение $G/G_{\langle v_\lambda \rangle} \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ в качестве проективизации орбиты старшего вектора v_λ. Образ мы обозначали через O_λ. Пусть ω — ограничение формы Фубини-Штуди с $\mathbb{P}(V)$ на O_λ. Форма Фубини-Штуди считается определенной с помощью единственного (с точностью до умножения на положительную константу) K-инвариантного эрмитова скалярного произведения на V. Напомним, что O_λ однородное K-многообразие, $O_\lambda = K/L$, где $L = K_\alpha$ с $\alpha = \frac{1}{2\pi i}\lambda \in \mathfrak{k}^*$ (см. предложение 10 из лекции 8 и предшествующее обсуждение).

Предложение 15. *ω совпадает с формой Костанта-Кириллова на орбите $K\alpha$.*

Доказательство. Действие K на симплектическом многообразии O_λ (с формой ω) гамильтоново. Достаточно доказать, что образ точки $[v_\lambda]$ при отображении моментов (обозначим его через μ) совпадает с α. Точка $[v_\lambda] \in \mathbb{P}(V(\lambda))$ является T_K-инвариантной. Поэтому $\mu([v_\lambda]) \in (\mathfrak{k}^*)^{T_K} \cong \mathfrak{t}^*$. Теперь все следует из такого вычисления

$$\langle \mu([v_\lambda]), \xi \rangle = \frac{\langle \xi v_\lambda, v_\lambda \rangle}{2\pi i \langle v_\lambda, v_\lambda \rangle} = \frac{1}{2\pi i}\lambda(\xi) = \alpha(\xi), \xi \in \mathfrak{t}_K.$$

□

3. Комментарии по поводу литературы

Доказательство теоремы Кемпфа-Несс взято из [3].

Существует много доказательств критерия Мацусимы, обзор (и ещё одно доказательство) см. в [4]. Наше доказательство является новым.

Критерий Луны доказан в [5]. Доказательство там весьма сложно для восприятия. Более понятное доказательство основано на результатах Кемпфа [6]. Наше доказательство, опять же, новое.

Литература

[1] Х. Крафт, Геометрические методы в теории инвариантов. М.:Мир, 1987, 312с.

[2] И.Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.

[3] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фунд. напр., т. 55. М.: ВИНИТИ, 1989, 137-309.

[4] I.V. Arjantsev. Invariant ideals and Matsusima criterion. Preprint(2005), arXiv:math.AG/0506430.

[5] D. Luna. Adhérences d'orbite et invariants. Invent. Math, 29(1975), p. 231-238.

[6] G. Kempf. Instability in invariant theory. Ann. Math. II. Ser. 108(1978), p. 299-316.