ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ "ОТОБРАЖЕНИЕ МОМЕНТОВ"

Задача 1

Пусть G — связная компактная группа Ли, L — её подгруппа Леви, Y — гамильтоново L-многообразие с симплектической формой ω^Y и отображением моментов $\mu^Y : Y \to \mathfrak{l}$. Положим $X = G *_L Y$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) На X существует G-инвариантная симплектическая форма ω и отображение моментов $\mu : X \to \mathfrak{g}$, такие, что $\omega|_Y = \omega^Y, \mu|_Y = \mu^Y$ (мы считаем, что Y вложено в X посредством отображения $y \mapsto [e, y]$).

(2) $\operatorname{im} \mu^Y \subset \mathfrak{l}^{pr} := \{\xi \in \mathfrak{l} | \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\xi) \subset \mathfrak{g}\}$.

Задача 2

Обозначим через $V_1 \cong \mathbb{R}^n, V_2 \cong \mathbb{C}^n, V_3 \cong \mathbb{H}^n$ тавтологические представления групп $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}), \mathrm{SU}(n), \mathrm{Sp}(n), n > 2$. Положим $G = \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{Sp}(n)$. Сколько классов сопряженности (относительно действия группы G-эквивариантных линейных автоморфизмов) имеется на G-модуле:

(1) $V_3 \oplus V_2^{\oplus 2} \oplus V_1^{\oplus 3}$,

(2) $V_3 \oplus V_2^{\oplus 3} \oplus V_1^{\oplus 2}$?

Задача 3

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа, H_1, H_2 — её редуктивные алгебраические подгруппы. Докажите, что найдется такое плотное в топологии Зарисского подмножество $Y \subset G/H_2$, что H_1-орбиты точек из Y замкнуты.

Замечание 1. Не всякое решение предыдущей задачи будет приниматься. Например, не будут приниматься решения, основанные на:

1) теореме об этальном слайсе и ортогонализуемости слайс-представлений (Д. Луна).

2) критерии Винберга стабильности действия.

Задача 4

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа с борелевской подгруппой B и максимальным тором T. Пусть C — положительная камера Вейля в $\mathfrak{t}(\mathbb{R})$, и M — рациональный многогранник в C. Постройте пример вложенного вложенного проективного G-многообразия X, для которого многогранник Бриона совпадает с dM (для некоторого d).

Задача 5

Пусть K — компактная группа Ли, T — её максимальный тор, C — камера Вейля в $\mathfrak{t}$. Постройте пример многогранника в C, который не совпадает с многогранником моментов $\mu(X) \cap C$ ни для какого компактного гамильтонова K-многообразия X. [1]

[1]Для получения оценки 3 (соотв., 4,5) надо решить не менее 3 (соотв. 4,5) задач.