Экзаменационные задачи, 25 декабря 2005 г.

(Рядом с номером задачи в скобках указано максимальное число очков, которое за нее можно получить)

1 (5). Предположим, что при каждом $n \geq 1$ случайные величины X_n и Y_n одинаково распределены и что $X_n \to X$ и $Y_n \to Y$ при $n \to \infty$ с вероятностью 1. Доказать, что X и Y одинаково распределены.

2. Пусть F_ξ — функция распределения случайной величины $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \xi_n$, где $\lambda \in (0,1)$ и ξ_n — независимые случайные величины, каждая из которых равна 1 и 0 с вероятностью $p \in (0,1)$ и $q = 1 - p$ соответственно.

(а) (3). Доказать, что при $\lambda \leq 1/2$ функция F_ξ непрерывна.

(б) (4). Доказать, что при всяком λ выполняется тождество $F_\xi(x) \equiv pF_\xi(\lambda^{-1}x - 1) + qF_\xi(\lambda^{-1}x)$.

(в) (6). Используя последнее тождество, доказать, что при $\lambda > 1/2$ функция F_ξ непрерывна.

3 (8). Предположим, что распределение случайной величины ξ сосредоточено на отрезке $[a,b]$, а ее дисперсия равна $\mathbf{D}\xi = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$. Найти распределение ξ.

4 (3). Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{k<n/3} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

5 (2). Найти стационарное распределение эргодической цепи Маркова с конечным числом состояний и матрицей перехода $\mathcal{P} = (p_{ij})$, где $\sum_i p_{ij} = 1$ при всяком j.

6 (4). Доказать, что у цепи Маркова с множеством состояний $\mathbb{Z}$ и вероятностями перехода $p_{ij} = 1/2$ при $j = i \pm 1$ не существует стационарного распределения.

7 (2). Предположим, что независимые случайные величины X_n одинаково распределены и что $X_n = 1$ с вероятностью $p > 1/2$ и $X_n = -1$ с вероятностью 1-p. Доказать, что $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$, где $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$.

8 (3). Пусть $p(n,k)$ — вероятность k успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p_n в каждом. С помощью характеристических функций доказать, что если $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} p(n,k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$$

.