## Листок 1. Гомотопии. $CW$-комплексы (7 сентября)

**1.** Докажите, что любое непрерывное отображение $S^n \to S^m$, где $n < m$, гомотопно постоянному отображению.

**2.** Докажите, что $S^p \times S^q / S^p \vee S^q \approx S^{p+q}$.

**3.** Докажите, что $S^p \times S^q \setminus point \sim S^p \vee S^q \quad (p, q \geqslant 1)$.

**4.** Докажите, что любое компактное подмножество $CW$-комплекса пересекает лишь конечное число открытых клеток.

**5.** Докажите, что если $Y \subset X$ — стягиваемый подкомплекс, то $X/Y \sim X$.

**6.** Пусть $Y$ — подкомплекс $CW$-комплекса $X$. Докажите, что $X/Y \sim X \cup CY$, где $CY$ — конус над $Y$.

**7.** Докажите, что отображение $f_0 : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, a_0)$ гомотопно (в классе отображений троек) постоянному отображению тогда и только тогда, когда существует гомотопия $f_t : (D^n, \partial D^n, s_0) \to (X, A, a_0)$, для которой $f_1(D^n) \subset A$ и $f_t(x)$ не зависит от $t$ для $x \in \partial D^n$, т.е. гомотопия неподвижна на $S^{n-1} = \partial D^n$.

**8.** Докажите, что гомотопическая последовательность пары

$$\cdots \to \pi_n(A) \to \pi_n(X) \to \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A) \to \ldots$$

точна.

**9.** Докажите, что $\pi_n(CX, X, x_0) \cong \pi_{n-1}(X, x_0)$ при $n \geqslant 1$.

**10.** Пусть $S^\infty$ —множество точек $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля и $\sum x_i^2 = 1$. Это множество является метрическим пространством, и на нём есть естественная топология. Докажите, что пространство $S^\infty$ стягиваемо.

*Указание*: докажите, что тождественное отображение гомотопно отображению $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$.

**11.** Пусть $A$ и $B$ — связные $CW$-комплексы с отмеченными точками $a_0$ и $b_0$. Докажите, что $A * B \sim \Sigma(A \wedge B)$, где $A \wedge B = A \times B / A \vee B$ и $A \vee B = (\{a_0\} \times B) \bigcup (A \times \{b_0\})$.