Листок 7. Вложения и погружения. Теорема Сарда (18 октября)

1. Пусть $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ — погружение. Докажите, что если $N > 2n$, то композиция отображения f и проекции на почти любую гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ является погружением.

2. Пусть M^n — компактное многообразие и $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ — вложение. Докажите, что если $N > 2n + 1$, то композиция отображения f и проекции на почти любую гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ является вложением.

3. Рассмотрим в пространстве матриц $M_{n,m}$ подмножество $M_{n,m,k}$, состоящее из всех матриц ранга k. Докажите, что если $k \leqslant \min(m, n)$, то $M_{n,m,k}$ — многообразие размерности $k(m+n-k)$.

4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение. Докажите, что если $n \geqslant 2m$, то для почти всех линейных отображений $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ отображение $g : U \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $g(x) = f(x) + Ax$, является погружением.

5. Докажите, что если M^n — компактное многообразие с непустым краем W^{n-1}, то не существует гладкой ретракции $r : M^n \to W^{n-1}$.

Указание. Пусть $a \in W^{n-1}$ — регулярное значение. Тогда $r^{-1}(a)$ — одномерное компактное подмногообразие, край которого лежит в W^{n-1}.

6. Пусть M^n — многообразие без края (не обязательно компактное), $f : M^n \to N^{n+1}$ — такое вложение, что $f(M^n)$ — замкнутое множество. Докажите, что если многообразие N^{n+1} односвязно, то многообразие M^n ориентируемо.

Указания. 1) Если при обходе вдоль кривой γ ориентация многообразия $M^n \subset N^{n+1}$ изменяется, то существует кривая $\tilde{\gamma}$ в N^{n+1}, трансверсально пересекающая M^n ровно в одной точке.

2) В случае односвязного многообразия N^{n+1} существует гладкое отображение $g : D^2 \to N^{n+1}$, ограничение которого на ∂D^2 совпадает с $\tilde{\gamma}$.

3) В общем положении пересечение $f(M^n)$, $g(D^2)$ и $\tilde{\gamma}$ состоит из чётного числа точек.

7. Докажите, что проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$.

8. Постройте погружение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$.