0. Вводная

Классические задачи вариационного исчисления. Модель геометрии Лобачевского. Сферическая геометрия. Риманова геометрия. Обзор содержания.

Основная задача вариационного исчисления — нахождение минимума функционала[1]

$$\mathcal{F}[y] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \tag{1}$$

в некотором классе кривых $y = y(x)$. Приведем ряд примеров.

1. Классические задачи вариационного исчисления.

а) *Задача о кратчайшем пути*

Среди всех путей, соединяющих точки A и B на плоскости, найти путь кратчайшей длины (см. рис. 0.1).

Решение этой задачи тривиально и хорошо известно. Математически ее можно сформулировать следующим образом:

$$L[y] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \to \min \tag{2}$$

при условиях

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \tag{3}$$

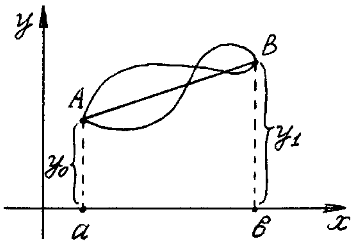

Рис. 0.1.

б) *Задача о брахистохроне*

[1]Напомним, что *функционалом* называется отображение, сопоставляющее каждому элементу заданного множества некоторое число. В данном случае “заданное множество” есть множество кривых определенного класса, а функционал задается специального вида интегралом.

Бусинка массы m под действием силы тяжести начинает двигаться по проволоке, расположенной в вертикальной плоскости. Трение отсутствует. При какой форме проволоки бусинка достигнет заданной точки за кратчайшее время (см. рис. 0.2)? Дадим математическую формулировку задачи. В соответствии с законом сохранения энергии

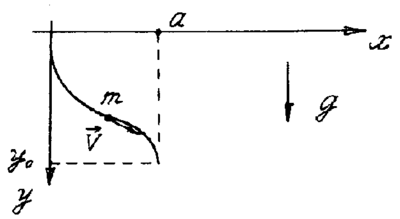

Рис. 0.2.

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

откуда $v = \sqrt{2gy}$ и, следовательно,

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx}{\sqrt{2gy(x)}}. \tag{4}$$

Таким образом, задача может быть сформулирована так:

$$\sqrt{2g} \cdot T = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{y(x)}}dx \to \min \tag{5}$$

при условиях

$$y(0) = 0, \quad y(a) = y_0, \tag{6}$$

(впрочем, как мы увидим далее, условие $y(a) = y_0$ можно не задавать).

в) *Задача о минимальной поверхности вращения*

Кривая, соединяющая заданные точки на плоскости, вращается вокруг оси абсцисс. Найти форму кривой, при которой получающаяся поверхность вращения будет иметь минимальную площадь (см. рис. 0.3).

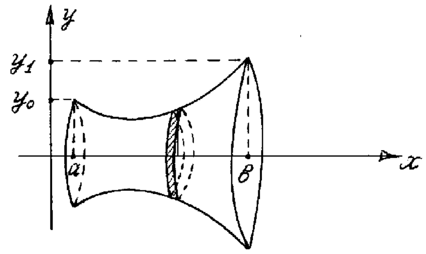

Рис. 0.3.

Математическая постановка.

Поскольку

$$dS = 2\pi y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx, \tag{7}$$

то, формулировка задачи имеет вид

$$\frac{S}{2\pi} = \int\limits_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx \to \min \tag{8}$$

при условиях

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1. \tag{9}$$

Приведем качественную картину решения в задачах б) и в) (детали будут даны в следующей лекции). В задаче б) решение имеет вид

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos t), \\ x = a(t - \sin t), \end{cases} \tag{10}$$

то есть представляет собой циклоиду (см. рис. 0.4)

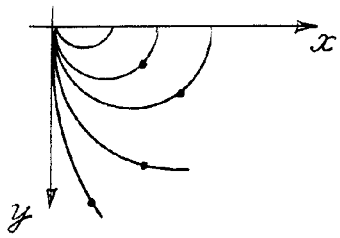

Рис. 0.4.

В задаче в) решения суть *цепные линии*

$$y = a\mathrm{ch}\frac{x - x_0}{a}, \tag{11}$$

соответствующая поверхность вращения называется *катеноидом* (см. рис. 0.5). Форму (11) принимает цепь, подвешенная за концы в поле силы тяжести.

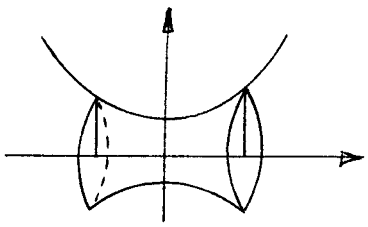

Рис. 0.5.

Следует отметить, что решение существует не для любых значений граничных условий (9) (на рис. 0.6 заштрихована *зона несуществования решения*; решения нет, если один из концов кривой находится в точке $(0,1)$, а другой — в этой зоне).

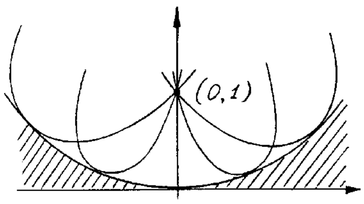

Рис. 0.6.

Этот факт иллюстрируется хорошо известными опытами с мыльными пленками: натянутая на два проволочных кольца мыльная пленка при раздвигании этих колец на расстояние больше критического лопается и заполняет каждое кольцо по отдельности (рис. 0.7).

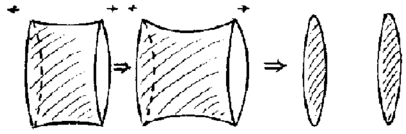

Рис. 0.7.

2. Модель геометрии Лобачевского.

На полуплоскости $\mathbf{R}_+^2 = \{(x,y)\,|\,y>0\}$ введем метрику, задаваемую элементом длины

$$\widetilde{dl} = \frac{1}{y}\sqrt{dx^2+dy^2}. \qquad (12)$$

Таким образом, "длина" кривой $y = y(x)$, $a \le x \le b$ в новой метрике задается выражением

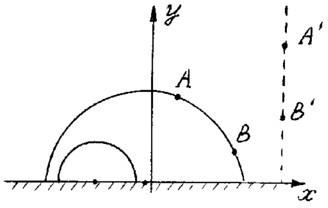

Рис. 0.8.

$$\widetilde{L}\,[y] = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+(y)^2}}{y}dx. \qquad (13)$$

"*Прямыми*" назовем линии минимальной "длины", то есть, кривые, минимизирующие функционал (13). Это дуги окружностей с центрами на оси абсцисс (см. рис. 0.8).

Из того же рисунка видно, что имеет место своего рода "нехватка линий": через точки A' и B' не проходит ни одной экстремали функционала (13). Причина, разумеется, заключается в том, что вертикальная прямая не имеет вида $y = y(x)$ (это же относится и к задаче о кратчайшем пути (2)–(3)). Выход заключается в том, чтобы рассматривать кривые, заданные в *параметрической* форме,

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1. \qquad (14)$$

Функционал "длины" можно записать в виде

$$\widetilde{L} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{y}dt, \qquad (15)$$

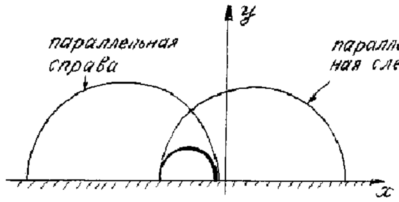

Рис. 0.9.

экстремали функционала (15) проходят через любую пару точек $\mathbf{R}_+^2$. Эти экстремали будем называть "прямыми".

В получившейся модели выполнены все аксиомы обычной геометрии, кроме 5-го постулата (см. рис. 0.9).

3. Сферическая геометрия.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ единичную сферу S^2, снабженную унаследованной из $\mathbf{R}^3$ метрикой. Элемент длины кривой, лежащей на сфере (рис. 0.10), имеет вид

$$dl = \sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}. \qquad (16)$$

"*Прямыми*" линиями (геодезическими) на сфере являются кривые, реализующие минимум функционала

$$L[l] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin\theta dt}. \qquad (17)$$

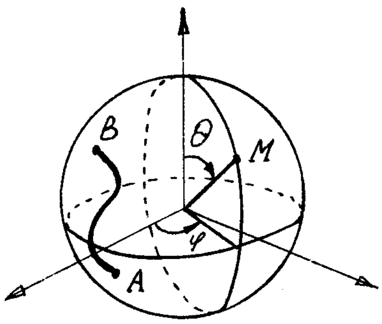

Рис. 0.10.

Эти кривые суть дуги больших кругов. Можно, однако, заметить следующее: если такая дуга составляет меньше половины окружности, то она действительно реализует минимум. Если же дуга длиннее полуокружности, то она не дает даже локального минимума (см. рис. 0.11). Это наблюдение порождает ряд вопросов.

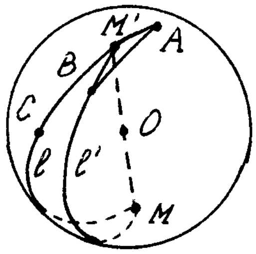

Рис. 0.11.

1) Каковы достаточные условия локального минимума?

2) Как найти максимальный отрезок геодезической, реализующий минимум?

3) Как устроена функция $L(l)$ вблизи геодезической (то есть, например, имеет ли она в ней минимум, максимум или седловую точку)?

Ответ на вопрос 2) дает теория *сопряженных точек*. В данном примере сопряженными являются диаметрально противоположные точки. Они соединяются семейством экстремалей $(l, l', \ldots)$. Отрезок геодезической реализует минимум тогда и только тогда, когда на нем нет сопряженных точек.

На более общий вопрос 3) ответ может быть получен с помощью *теории Морса*. Если отрезок l_0 геодезической содержит сопряженную точку, то $L(l)$ имеет в l_0 седловую точку. *Отрицательный индекс инерции* $L(l)$ *конечен* и может быть вычислен через характеристики сопряженных точек.

4. Риманова геометрия. Рассмотренные в предыдущих пунктах модели являются частными случаями общей *римановой геометрии*.

Пусть X — многообразие, на котором задана *риманова метрика* — гладко зависящая от точки $x \in X$, положительно определенная квадратичная форма dl^2 на касательном пространстве T_xX. В локальный координатах $(x^1, \dots, x^n)$ она может быть задана формулой

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx^i dx^j, \tag{18}$$

где $g_{ij}(x)$ — положительно определенная при каждом x матрица.

Геодезическими на X называются экстремали функционала длины

$$L[l] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j} dt. \tag{19}$$

Приведем перечень лишь некоторых задач, возникающих в рамках римановой геометрии, многие из которых имеют существенно глобальный характер.

1) Исследование *однократности* покрытия X системой геодезических, выходящих из некоторой точки M (рис. 0.12). При этом вновь важную роль играют *сопряженные точки*: приходится исследовать *кривизну* многообразия X (грубо говоря, кривизна — это препятствие к выбору локальных координат $y^1, \dots, y^n$, в которых метрика записывалась бы в виде

$$dl^2 = \sum_{i=1}^{n} (dy^i)^2. \tag{20}$$

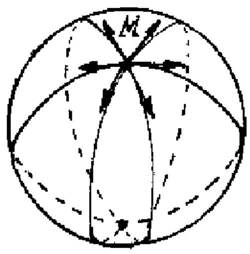

Рис. 0.12.

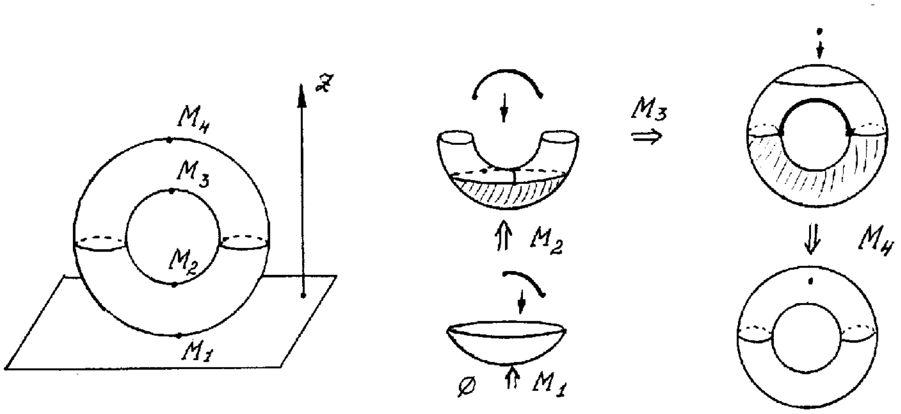

Рис. 14:

2) Исследование *параллельного переноса*. Параллельный перенос по разным кривым на римановом многообразии дает разные результаты (рис. 0.13); эта ситуация может быть изучена с помощью соответствующих характеристик кривизны.

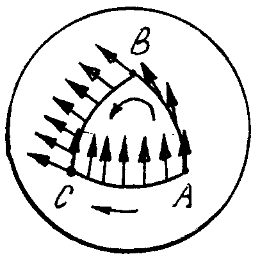

Рис. 0.13.

3) Описание *топологии пространства путей* $\Omega(X,p,q)$ (элементы этого пространства — всевозможные пути на X, соединяющие заданные точки $p,q\in X$).

Более того, оказывается, что топологию многообразий можно исследовать с помощью критических точек некоторой специальной функции на многообразии — *функции Морса*. Так, на рис. 14, эта процедура проиллюстрирована для случая тора $T^2\subset \mathbf{R}^3$; в качестве функции Морса выбрана функция $(-z)$, она имеет критические точки M_1, M_2, M_3, M_4; переход через каждое критическое значение z_0 топологически эквивалентен приклеиванию диска размерности, равной отрицательному индексу инерции ind_- соответствующей критической точки).

Для изучения топологии пространства путей на X в качестве функции Морса на $\Omega(X,p,q)$ можно выбрать *функционал действия*

$$S=S[l]=\int\limits_l \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\,\dot{x}_i\dot{x}_j\;dt, \tag{21}$$

что приводит к изучению сопряженных точек, их индексов и т.д.

1 Вариация и экстремум дифференцируемого функционала. Необходимые условия экстремума в задаче с закрепленными концами

Вариации и экстремум дифференцируемого функционала. Необходимые и достаточные условия экстремума в терминах первой и второй вариации функционала. Уравнение Эйлера. Достаточные условия экстремума. Классические вариационные задачи для случая кривых с закрепленными концами.

1. Вариация и экстремум дифференцируемого функционала. Пусть E — банахово пространство с нормой $||\cdot||$ и

$$\mathcal{F}:\ E \to \mathbf{R}$$

— функционал.

Определение 1.1 Функционал $\mathcal{F}$ называется *дифференцируемым* в точке $y_0 \in E$, если существует линейный непрерывный функционал

$$\delta\mathcal{F}(y_0,\,\cdot\,):\ E \to \mathbf{R},$$

для которого имеет место равенство

$$\mathcal{F}[y_0+h] - \mathcal{F}[y_0] = \delta\mathcal{F}[y_0,h] + r[y_0,h],$$

причем функционал $r(y_0,h)$ обладает следующим свойством.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из неравенства $||h|| < \delta$ будет следовать оценка

$$|r(y_0,h)| < \varepsilon||h||.$$

Функционал $\delta\mathcal{F}(y_0,\cdot h)$ называется (первой) *вариацией* или *дифференциалом Фреше* функционала $\mathcal{F}$ в точке y_0.

Упражнение 1.2 Показать, что дифференцируемый функционал непрерывен.

Определение 1.3 Будем говорить, что точка $y_0 \in E$ является точкой *локального минимума* для функционала $\mathcal{F}$, если

$$\mathcal{F}[y] \geq \mathcal{F}[y_0]$$

для всех значений y с $||y-y_0|| < \delta$ при некотором $\delta > 0$.

Основная проблема вариационного исчисления — нахождение локального минимума или максимума (локального экстремума) для функционала $\mathcal{F}$.

Теорема 1.4 *Пусть y_0 — локальный экстремум функционала $\mathcal{F}$. Тогда его вариация в точке равна* 0.

$$\delta\mathcal{F}(y_0, h) = 0 \tag{22}$$

для всех $h \in E$.

Элемент $y_0 \in E$, для которого выполнено условие (22) называется *стационарной точкой* или *экстремалью* функционала $\mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 1.4. Предположим противное, то есть пусть

$$\delta\mathcal{F}(y_0, h) \neq 0. \tag{23}$$

Для малых значений t имеем разложение:

$$\mathcal{F}[y_0 + th] = \mathcal{F}[y_0] + t\delta\mathcal{F}[y_0, h] + o(t),$$

из которого тривиально следует, что при условии (23) y_0 не является точкой экстремума.

Определим *вторую вариацию* $\delta^2 F(y_0, \cdot\,)$ функционала $\mathcal{F}$ как непрерывную квадратичную форму на E, определяемую из равенства

$$\mathcal{F}[y_0 + h] - \mathcal{F}[y_0] = \delta\mathcal{F}[y_0, h] + \frac{1}{2}\delta^2\mathcal{F}[y_0, h] + r_1[y_0, h],$$

где функционал $r_1(y_0, h)$ обладает тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|r_1(y_0, h)| < \varepsilon ||h||^2$$

для $||h|| < \delta$.

Теорема 1.5 (достаточное условие минимума функционала). *Пусть*

$$\delta\mathcal{F}[y_0, \cdot\,] = 0,$$

$$\delta^2\mathcal{F}[y_0, h] \geq c||h||^2, \quad c > 0.$$

Тогда y_0 — точка минимума.

2. Вычисление вариации функционала в основной задаче вариационного исчисления в терминах лагранжиана. Уравнения Эйлера–Лагранжа. Пусть функционал $\mathcal{F}$ имеет вид

$$\mathcal{F}[y] = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx. \tag{24}$$

Предположим, что $\mathcal{F} \in C^2$, $y \subset C^1[a, b]$,

$$||y|| = \sup_{x \in [a,b]} \{|y(x)| + |y'(x)|\}.$$

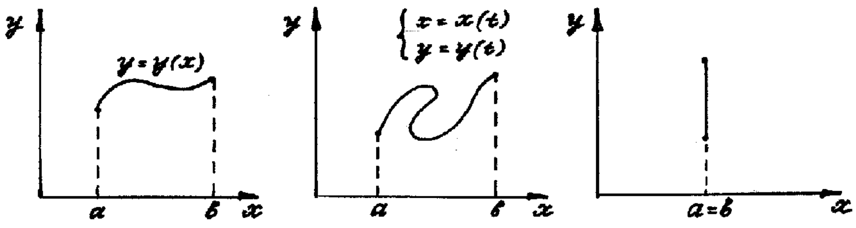

Рис. 15:

Замечание 1.6 Можно рассматривать функционал типа (24)

$$\mathcal{F}[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), \dot{x}\,(t), \dot{y}\,(t))\, dt \tag{25}$$

на классе (гладких) кривых γ

$$\gamma = \{x = x(t),\ y = y(t)\}$$

на плоскости (x, y) параметризованных параметром $t \in [t_0, t_1]$. При этом предполагается, что функция F в (25) однородна первой степени по "импульсным" переменным:

$$F(x, y, \lambda p, \lambda q) = \lambda F(x, y, p, q).$$

Эту ситуацию мы будем называть *параметрической*.Разница между классом кривых в параметрическом и непараметрическом случае показана на рис. 15.

Функцию F, входящую в определение функционалов (24), (25), будем называть *лагранжианом*.

Упражнение 1.7 Показать, что значение функционала $\mathcal{F}(\gamma)$ не зависит от параметризации ориентированной кривой γ.

Найдем вариацию функционала (24). Имеем

$$\mathcal{F}[y+h] - \mathcal{F}[y] = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y')h'\right]\, dx + O(||h||^2).$$

Поэтому

$$\delta\mathcal{F}[y, h] = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}h + \frac{\partial F}{\partial y'}h'\right]\, dx. \tag{26}$$

Упражнение 1.8 Выписать вариацию функционала (25).

3. Уравнения Эйлера. Пусть y — экстремаль функционала (24), $h \in C^1([a,b])$, $h(a)=h(b)=0$. Тогда, интегрируя по частям в равенстве (26), получаем

$$\delta F[y,h] = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right] h(x)\,dx,$$

откуда, в силу произвольности $h(x)$ следует (лемма Дю–Буа–Реймонда), что функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,$$

которое называется *уравнением Эйлера*.

Упражнение 1.9 Если $F_{y'y'} \neq 0$, то существует решение уравнения Эйлера, имеющее непрерывную вторую производную (классическую). Таким образом, выражение $\frac{d}{dx}F_{y'}$ можно вычислить как производную сложной функции.

4. Решение классических задач вариационного исчисления.

а) *Задача о кратчайшем пути.* Эта задача описывается функционалом

$$L[y] = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx. \qquad (27)$$

Уравнение Эйлера для (27) имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0$$

и его решение

$$y' = c_1, \quad y = c_1 x + c$$

показывает, что кратчайший путь — прямой!

б) *Задача о брахистохроне.* Как показано на предыдущей лекции, функционал в этой задаче имеет вид

$$\sqrt{2g}T[y] = \int\limits_0^a \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}dx.$$

Поскольку функция

$$F(y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}$$

не зависит от x, то уравнение Эйлера имеет первый интеграл

$$F - y'F_{y'} = \text{const}\,.$$

В самом деле, если F не зависит от x явно, то

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'} &= F_y \cdot y' + F_{y'} \cdot y'' - y''F_{y'} - y'\frac{d}{dx}F_{y'} \\ &= y'\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) = 0 \quad \text{(в силу уравнения Эйлера).}\end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение, получим решение в виде

$$\begin{cases} x = C_1 + \frac{C}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{C}{2}(1 - \cos t) \end{cases}$$

(циклоида).

в) *Задача о минимальной поверхности вращения.* Функционал для $S[y]$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}S[y] = \int\limits_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Таким образом,

$$F(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2},$$

то есть

$$F - y'F_{y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c,$$

откуда следует, что

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1},$$

то есть

$$y = c\,\mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{c} + c_1\right).$$

Решая уравнение Эйлера, получим

$$y = C_1\mathrm{ch}\,\left(\frac{x}{c} + C_2\right).$$

г) *Модель геометрии Лобачевского.* Это существенно параметрический случай. Функционал имеет вид

$$L[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y}\,dt.$$

Здесь

$$F(y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y},$$

и уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dt} F_{\dot{y}} = 0, \\ -\dfrac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$F_{\dot{x}} \frac{\dot{x}}{y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \text{const}.$$

Выберем такую параметризацию, чтобы

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1.$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = Cy, \\ \dot{y} = \sqrt{1 - C^2 y}, \end{cases}$$

отсюда получаем:

i) при $C = 0$ вертикальные прямые;

ii) при $C \neq 0$ кривые вида

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{1}{C} \sin(Ct + C_0); \\ y = \dfrac{1}{C} \cos(Ct + C_0). \end{cases}$$

2 Задачи со свободной границей и условный экстремум (необходимые условия)

Задача со свободной границей. Уравнение Эйлера. Условие трансверсальности. Условный экстремум. Примеры.

1. Задача со свободной границей.

а) *Непараметрический случай.* До сих пор мы рассматривали задачу о нахождении минимума функционала типа

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{28}$$

в классе кривых, у которых концы закреплены (фиксированы):

$$y(a) = y_0; \quad y(b) = y_1.$$

Теперь мы рассмотрим задачи иного типа. Именно, мы предположим, что концы кривых, в классе которых ищется экстремум функционала (28) не закреплены, а могут перемещаться по заданным кривым.

Рассмотрим вначале случай, когда левый конец кривой по-прежнему закреплен, а у правого конца фиксирована только абсцисса b (см. рис. 2.16), то есть

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx \to \min \tag{29}$$

$$y(a) = y_0 \quad y(b) \in \{\text{прямой } x = b\}. \tag{30}$$

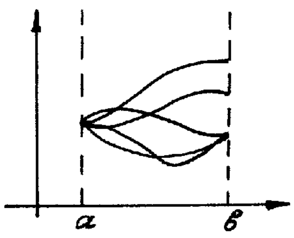

Рис. 2.16.

Функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0. \tag{31}$$

Как и раньше, вариация функционала (28) имеет вид

$$\delta I = \int_a^b [F_y \delta y + F_{y'} \delta y']\, dx$$

(здесь нам будет удобнее обозначать вариации переменных символом δ) или, после интегрирования по частям с учетом первого из условий (30)

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y \bigg|_a^b \\
&= \text{(в силу (31) и условия в точке } a\text{)} \\
&= \frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=b} \delta y(b).
\end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta y(b)$ экстремаль $y = y(x)$ должна удовлетворять следующему условию

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=b} = 0. \tag{32}$$

Условие (32) называется *условием трансверсальности.*

Приведем примеры.

1) *Кратчайший путь* (рис. 2.17).

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{1 + (y')^2}, \\
\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.
\end{aligned}$$

Условие трансверсальности $y'(b) = 0$.

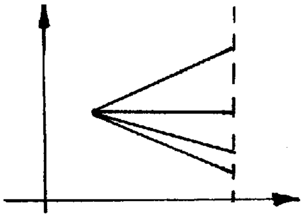

Рис. 2.17.

2) *Брахистохрона* (рис. 2.18).

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}, \\
\frac{\partial F}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{y[1 + (y')^2]}}.
\end{aligned}$$

Условие трансверсальности $y'(b) = 0$.

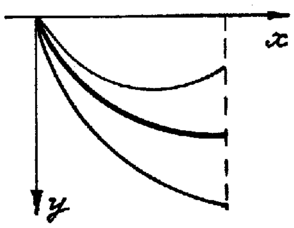

Рис. 2.18.

3) *Минимальная поверхность вращения* (рис. 2.19).

$$F = y\sqrt{1+(y')^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = y\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Условие трансверсальности $y'(b) = 0$ или $y(b) = 0$.

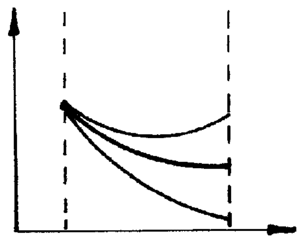

Рис. 2.19.

б) *Параметрический случай.* Теперь перейдем к общему случаю — ситуации, когда правому концу кривой предписано находиться на некоторой кривой l (рис. 2.20). Постановка задачи следующая. Найти кривую

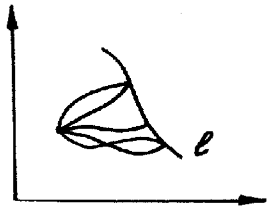

Рис. 2.20.

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

для которой

$$\begin{aligned} &I = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \to \min, \\ &(x, y)|_{t=t_0} = (x_0, y_0), \\ &\Phi(x(t_1), y(t_1)) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$\Phi(x, y) = 0, \quad d\Phi \neq 0$$

— заданная кривая l. Предполагается, кроме того, что функция F однородна степени 1.

Приступим к выводу условий на экстремаль. Аналогично непараметрическому случаю, имеем

$$\delta I = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta y\right]\Bigg|_{t=t_1} = 0 \tag{34}$$

(δx, δy — не произвольны!)

Из условия (33) получаем

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y\right]\Bigg|_{t=t_1} = 0. \tag{35}$$

Таким образом, условие трансверсальности в этом случае записывается в виде равенства

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x(t_1) + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta y(t_1) = 0$$

для всех пар $(\delta x(t_1), \delta y(t_1))$, для которых выполнено равенство

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x(t_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y(t_1) = 0.$$

Отсюда и в силу $\omega \neq 0$ следует, что формы δI и ω пропорциональны

$$\delta I = \lambda\omega; \tag{36}$$

или, что то же

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0.$$

2. Условный экстремум функционала. В ряде задач необходимо найти минимум функционала при некоторых дополнительных условиях, например, при условии, что данная кривая лежит на множестве уровня некоторого другого функционала.

Примеры (постановка задач). Примером такого рода служат *изопериметрические задачи*, постановку двух из них мы и приводим.

а) *Случай тяжелой нити.* Требуется узнать, какую форму примет под действием силы тяжести тяжелая нить заданной длины L_0, закрепленная с двух концов (см. рис. 2.21).

Дадим математическую постановку задачи.

Если через U обозначить потенциальную энергию нити, то условие заключается в том, чтобы

$U \to \min$; при условии $L = L_0 =$ const .

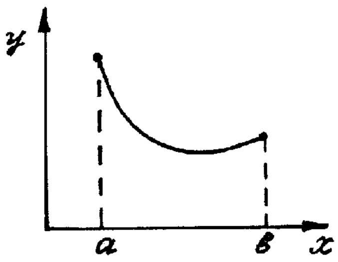

Рис. 2.21.

Выведем соответствующее уравнение. Имеем

$$dU = gy\,dm = gy\rho\,dl = \rho g y\sqrt{1+(y')^2}\,dx. \tag{37}$$

Здесь $y = y(x)$ — уравнение нити, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность нити и dm — элемент массы. Интегрируя (37), получим

$$U = \rho g \int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Таким образом, задача состоит в нахождении минимума функционала

$$I = \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

при условии, что

$$I = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = L_0.$$

б) *Задача Дидоны.* Найти формулу кривой $y = y(x)$ заданной длины L_0, площадь под которой максимальна[2] (рис. 2.22).

... Впервые такая задача встречается в легенде об основании Карфагена.

Все мы знаем рассказ о том, как Дидона выторговала клочок земли, который она сможет ограничить воловьей шкурой. Никогда не следует недооценивать способности женщины! Аккуратно разрезав шкуру и получив очень длинный и тонкий ремешок, она определила наибольший участок земли. который им можно было ограничить. При этом она решила так называемую изопериметрическую задачу; конечно, ее решением оказался круг. Так что покончим с мифом о неспособности женщин заниматься математикой! ...

Эта задача состоит в нахождении минимума функционала

$$I = \int_a^b y\,dx$$

при условии, что

$$\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = L_0.$$

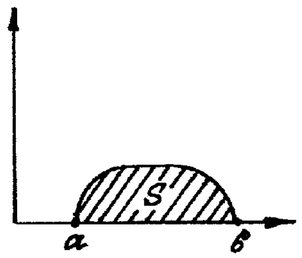

Рис. 2.22.

Общая постановка задачи. Общая постановка задачи состоит в нахождении минимума функционала

$$I = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \tag{38}$$

при условии, что

$$J = \int_a^b G(x,y,y')\,dx = I_0 \tag{39}$$

[2]Я не могу отказать себе в удовольствии привести великолепное замечание Л. Янга по поводу этой задачи, которое он приводит в своей книге.

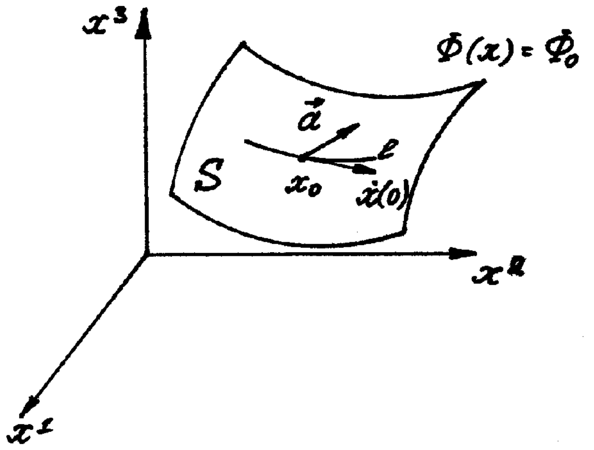

Рис. 23:

Напомним, как обстоит дело в конечномерном случае. Требуется найти минимум функции $F(x)$ n переменных при условии, что $\Phi(x) = \Phi(x_0)$ на некоторой поверхности S (рис. 23). Поверхность S будем предполагать регулярной:

$$d\Phi(x) \neq 0 \quad \text{на} \quad S.$$

Задачу будем решать следующим образом. Пусть x_0 — точка минимума функции F на S.

1) Рассмотрим кривую

$$l : \, x = x(t), \quad x(0) = x_0, \quad l \in S.$$

2) Сужение

$$F(x)\big|_l = F(x(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)$$

имеет минимум при $t = 0$, то есть

$$\dot{\varphi} = dF[\dot{x}(0)] = 0,$$

где $\dot{x}(0)$ — касательный вектор к l.

3) Заметим, что вектор $\dot{x}(0)$ не произвольный (он касателен к кривой, лежащей на S). Это означает, что, поскольку

$$\Phi(x(t)) \equiv \Phi_0,$$

то

$$d\Phi[\dot{x}(0)] = 0.$$

Обратно, если

$$d\Phi[\vec{a}] = 0,$$

то $\vec{a}$ — вектор скорости к некоторой кривой $l \subset S$.

4) Вывод:

$$dF(\vec{a}) = 0 \quad \text{для всех} \quad \vec{a} : \, d\Phi(\vec{a}) = 0$$

(это *необходимое* условие минимума).

Далее, аналогично (36) получаем, что

$$dF \sim d\Phi,$$

то есть существует такое число λ, что
$$dF + \lambda d\Phi = 0 \tag{40}$$
на любом векторе $\vec{a}$.

Теперь вместе с уравнением
$$\Phi(x) = \Phi_0 \tag{41}$$
уравнения (40), (41) определяют систему $(n+1)$ уравнений относительно $(n+1)$ неизвестных $(x^1, \ldots, x^n, \lambda)$. Решая ее, мы и найдем стационарные точки.

Перейдем теперь к бесконечномерному случаю.

Предположим, что
$$\delta J \neq 0$$
(по крайней мере, на решении). Выведем *необходимые условия* минимума функционала.

Пусть
$$y_0 = y_0(x)$$
— кривая и
$$I(y_0) = \min .$$
Рассмотрим для $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ семейство
$$y = y(x, t)$$
так, чтобы $y(x, 0) = y_0(x)$ и
$$J[y(x, t)] \equiv J_0 \tag{42}$$
по $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Тогда функция
$$\varphi(t) = I[y(x, t)] \tag{43}$$
имеет минимум при $t = 0$.

Выпишем необходимые условия минимума функции (43)
$$\varphi'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} I[y(x, t)]|_{t=0} = \delta I(y_0(x), \delta y(x)] = 0,$$
где
$$\delta y(x) = \dot{y}\ (x, t)|_{t=0}.$$
Заметим, что в силу условия (42), вариация $\delta y(x)$ не произвольна. В частности,
$$\frac{d}{dt} J\ [y(x, t)]|_{t=0} = \delta J[y_0(x), \delta y(x)] = 0.$$
Оказывается, что последнее равенство описывает все ограничения на $\delta y(x)$. Именно, имеет место следующая

Лемма 2.1 *Если*

$$\delta J \not\equiv 0 \quad \textit{на} \quad y_0(x), \tag{44}$$

то для любой вариации $\delta y(x)$ *такой, что*

$$\delta J[y_0(x), \delta y(x)] = 0$$

существует функция $y(x,t)$, *такая, что*

$$\begin{aligned} \dot{y}\,(x,t)\Big|_{t=0} &= \delta y(x), \\ y(x,0) &= y_0, \\ J[y(x,t)] &\equiv J_0. \end{aligned}$$

Доказательство. Если выполнено условие (44), то существует $\delta y_0(x)$, такое, что

$$\delta J[\delta y_0(x)] = 1.$$

Далее, любая вариация $\delta y(x)$ допускает разложение

$$\delta y(x) = \overline{\delta y}(x) + \mu \delta y_0(x),$$

причем

$$\delta J[\overline{\delta y}(x)] = 0.$$

Рассмотрим уравнение относительно μ

$$J[y_0 + \overline{\delta y} + \mu \delta y_0] = J_0. \tag{45}$$

Поскольку

$$\frac{d}{d\mu} J\;[y_0 + \overline{\delta y} + \mu \delta y_0]\Big|_{\mu=0, \overline{\delta y}=0} = \delta J[\delta y_0] = 1 \neq 0,$$

то, по теореме о неявной функции, существует решение уравнения (45)

$$\mu = \mu[\overline{\delta y}].$$

Отметим, что $\mu[\overline{\delta y}]$ — функционал на ядре $\operatorname{Ker}\, \delta J$, дифференцируемый в смысле Фреше (доказательство вполне аналогично доказательству теоремы о неявной функции). Имеем цепочку импликаций

$$\begin{aligned} & J[y_0 + \overline{\delta y} + \mu[\overline{\delta y}]\delta y_0] \equiv 0 \\ \Rightarrow \quad & \delta J[y_0, \overline{\delta y} + \delta\mu[\overline{\delta y}]\delta y_0] = 0 \\ \Rightarrow \quad & \delta J[y_0, \delta y_0]\delta\mu[\overline{\delta y}] = 0 \\ \Rightarrow \quad & \delta\mu[\overline{\delta y}] = 0 \end{aligned}$$

в нуле.

Теперь можно положить

$$y(x,t) = y_0(x) + t\delta y(x) + \mu[t\delta y(x)]\delta y_0(x).$$

Лемма доказана.

Итак, *необходимое условие минимума* задачи (38), (39) имеет вид

$$\delta I[y_0(x), \delta y(x)] = 0$$

для всех таких $\delta y(x)$, что

$$\delta J[y_0(x), \delta y(x)] = 0.$$

Можно переформулировать полученные условия в духе (36).

Если

$$\begin{aligned} \delta y &= \overline{\delta y}(x) + \mu\delta y_0(x), \\ \mu &= \delta J[y_0, \delta y(x)], \end{aligned}$$

то

$$\delta I y_0(x), \delta y(x)] = \mu \underbrace{\delta I[y_0(x), \delta y(x)] = 0]}_{-\lambda} = -\lambda\delta J[y_0(x), \delta y(x)].$$

Итак, необходимое условие минимума задачи (38), (39) может быть сформулировано следующим образом

Теорема 2.2 *Если задача* (38), (39) *имеет минимум* $y = y_0(x)$, *то существует такое число* λ, *что для любой вариации* $\delta y(x)$ *имеет место равенство*

$$(\delta I + \lambda\delta J)[y_0(x), \delta y(x)] = 0.$$

Число λ называется *множителем Лагранжа.*

Упражнение 2.3 Рассмотреть параметрический случай.

Примеры (решение). Решим теперь сформулированные выше задачи.

а) *Задача о тяжелой нити.* Полагаем

$$F_\lambda = y\sqrt{1+(y')^2} + \lambda\sqrt{1+(y')^2} = (y+\lambda)\sqrt{1+(y')^2}.$$

Так как функция F_λ не зависит от x, то

$$F_\lambda - y'\frac{\partial F_\lambda}{\partial y'} = \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+(y')^2}} = C = \text{ const }.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1},$$

решая которое получим уравнение цепной линии

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{C} - \lambda.$$

Для трех констант C, x_0, λ имеем три условия

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = L_0.$$

б) *Задача Дидоны.* Определим функцию

$$F_\lambda = y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Поскольку функция F_λ не зависит от x, то

$$F_\lambda - y'\frac{\partial F_\lambda}{\partial y'} = y + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C = \text{ const}.$$

Откуда получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - c)^2}}{y - c},$$

решая которое получаем уравнения окружностей

$$(y - c)^2 + (x - x_0)^2 = \lambda^2.$$

Входящие в это уравнение три константы определяются тремя условиями задачи

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \quad \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = L_0.$$