1 Достаточные условия экстремума “в малом” (непараметрический случай). Двойственность лагранжева и гамильтонова формализма

Геодезическое покрытие. Действие. Геодезический наклон. Инвариантный интеграл Гильберта. Условие Лежандра и существование экстремума “в малом”. Гамильтонова интерпретация. Преобразование Лежандра и двойственность гамильтонова и лагранжева формализма.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I[x] = \int_a^b L(t, x, \dot{x})\, dt \tag{1}$$

при условиях

$$x(a) = x_0, \quad x(b) = x_1. \tag{2}$$

Необходимые условия экстремума — уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3}$$

дают (общее) семейство экстремалей

$$x = x(t, C_1, C_2),$$

зависящее от произвольных констант C_1 и C_2, которые затем нужно определять из условия (2).

1. Метод геодезических покрытий. Мы сейчас займемся выводом *достаточных* условий. Для этого необходимо сравнить $I[x]$ с $I[\widetilde{x}]$, где x — экстремаль, а $\widetilde{x}$ — произвольная кривая, удовлетворяющая тем же условиям (2). Имеем

$$I[x] = \int_a^b L(t, x, \dot{x})\, dt, \tag{4}$$

$$I[\widetilde{x}] = \int_a^b L(t, \widetilde{x}, \dot{\widetilde{x}})\, dt, \tag{5}$$

то есть одно и то же выражение интегрируется по различным кривым. Идея метода, который мы собираемся применить, заключается в том, чтобы свести дело к сравнению интегралов от различных выражений *по одной и той же кривой* $\widetilde{x}$ (напомним, что экстремаль x фиксирована, а кривая $\widetilde{x}$ произвольна).

Итак, будем искать представления для (4) в виде интеграла

$$I[x] = \int\limits_{\{x=\widetilde{x}(t)\}} P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx, \tag{6}$$

независящего от пути интегрирования. Тогда

1) Из независимости интеграла (6) от кривой $\widetilde{x}(t)$ вытекает, что подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции:

$$P\,dt + Q\,dx = dS(t,x). \tag{7}$$

2) Функция S определена с точностью до произвольной константы. Будем считать, что

$$S(a,x_0) = 0, \tag{8}$$

тогда из (6), (7), (8) вытекает, что

$$S(b,x_1) = I[x]. \tag{9}$$

Удобно выводить достаточные условия минимума сразу для *пучка* экстремалей, выходящего из точки (a,x_0)[1].

Из (8), (9) следует, что значение функционала I на экстремали равно значению функции S в конечной точке этой экстремали:

$$S\ (\text{конец экстремали}) = I\ [\text{экстремаль}].$$

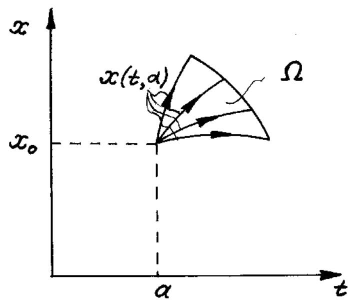

Рис. 3.1.

Теперь из однозначности функции S следует, что область, где функция S определена, однократно покрывается экстремалями (см. рис. 1.1). Разумеется, вся плоскость, вообще говоря, не может быть покрыта экстремалями однократно. Од-нако, оказывается, что, при естественном условии, покрытие однократно, по крайней мере, в малой окрестности Ω начальной точки. Именно, предположим, что

$$\frac{\partial^2 L}{(\partial\,\dot{x})^2} \neq 0. \tag{10}$$

[1]Это обычный прием в механике, когда действие рассматривается как величина, характеризующая движение по истинным траекториям, и сравнивают значения, которые действие имеет для траекторий, имеющих общее начало, в момент времени a, но проходящее в момент времени b через различные положения (см. [ЛаЛи].)

Тогда уравнение Эйлера (3) разрешимо относительно старшей производной $\ddot{x}$ и семейство экстремалей, выходящих из точки (a, x_0), можно параметризовать специальным образом, задавая $x(t,\alpha)$, как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x}, \\ x(a,\alpha) = x_0, \quad \dot{x}(a,\alpha) = \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]. \end{cases} \tag{11}$$

Однократность покрытия, то есть взаимная однозначность отображения

$$(t,\alpha) \mapsto (t, x(t,\alpha)) \tag{12}$$

тогда следует из теоремы о неявной функции. Действительно, если

$$J \equiv \frac{D(t, x(t,\alpha))}{D(t,\alpha)} = \frac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha}, \tag{13}$$

то из (11) имеем:

$$J|_{t=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial J}{\partial t}\right|_{t=a} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\, \dot{x}(t,\alpha)\Big|_{t=a} = 1. \tag{14}$$

Отсюда

$$J = t - a + O(|t-a|^2), \tag{15}$$

и отображение (12) при $(\alpha, t) \in [\alpha_0, \alpha_1] \times (a, a+\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, задает однократное покрытие области Ω (без вершины (a, x_0)). Поэтому в Ω однозначно определена функция $S(t,x)$, задаваемая формулой

$$S(t, x(t,\alpha)) = \int_a^t L(t, x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha))\, dt. \tag{16}$$

Вычислим производные

$$P = \partial S/\partial t \quad \text{и} \quad Q = \partial S/\partial x$$

функции $S(t,x)$. Из (16) дифференцированием по t, α получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = L(t, x, \dot{x}), \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} &= \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha}\right] dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \frac{\partial x}{\partial \alpha}\bigg|_a^t + \int_a^t \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] \frac{\partial x}{\partial \alpha}\, dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \end{aligned} \tag{18}$$

поскольку $\partial x/\partial\alpha|_{t=a} = 0$. Далее, т.к. $\partial x/\partial\alpha \neq 0$ в Ω, то

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t,\alpha)) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha))$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x(t,\alpha)) = L(t, x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha)) - \dot{x}(t,\alpha)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha)).$$

Кроме того, мы можем вернуться к переменным (t, x), выразив в Ω функцию

$$\alpha = \alpha(t, x)$$

через (t, x) из уравнения

$$x(t, \alpha(t, x)) = x.$$

Обозначим через

$$\xi(t, x) = \dot{x}(t, \alpha(t, x)); \tag{19}$$

величина $\xi(t, x)$ называется *геодезическим наклоном*. Итак, в достаточно малой окрестности начальной точки функции представление (6) действительно существует и функции P и Q могут быть найдены по формуле

$$P = \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = L(t, x, \xi(t, x)) - \xi(t, x)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \xi(t, x)), \tag{20}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \xi(t, x)). \tag{21}$$

Интеграл

$$\int P\,dt + Q\,dx = \int \left\{ L(t, x, \xi(t, x)) + (\dot{x} - \xi(t, x))\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \xi(t, x)) \right\} dt \tag{22}$$

не зависит от выбора пути интегрирования и называется *инвариантным интегралом Гильберта*; инвариантность, как видно из сказанного выше, вытекает из того, что решения уравнения $\dot{x} = \xi(t, x)$ суть экстремали.

Верно и обратное.

Лемма 1.1 *Пусть $\xi(t, x)$ — такая функция, что интеграл Гильберта (22) инвариантен. Тогда решения уравнения*

$$\dot{x} = \xi(t, x)$$

являются экстремалями.

Доказательство. В силу инвариантности интеграла (22),

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t},$$

то есть

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \xi \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial x} - \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\ \partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 L}{\partial t\, \partial \dot{x}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\ \partial \dot{x}} \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial t} + \xi \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \tag{23}$$

С другой стороны, если x — решение уравнения

$$\dot{x} = \xi(t, x), \tag{24}$$

то

$$\ddot{x} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{25}$$

Поэтому на решениях уравнения (24)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial t} + \dot{x} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial x} + \ddot{x} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right), \tag{26}$$

то есть все они удовлетворяют уравнениям Эйлера. Лемма доказана.

Получим теперь достаточные условия (в малом). Для этого сравним $I[\widetilde{x}]$ и $I[x]$. Имеем

$$\begin{aligned}
I[\widetilde{x}] - I[x] &= \int_a^b L(t, \widetilde{x}, \dot{\widetilde{x}})\, dt - \int_a^b L(t, x, \dot{x})\, dt = (\text{в силу (6)}) \qquad (27) \\
&= \int_a^b L(t, \widetilde{x}, \dot{\widetilde{x}})\, dt - \int_a^b [P(t, \widetilde{x}) + \dot{\widetilde{x}} Q(t, \widetilde{x})]\, dt = (\text{в силу (22)}) \\
&= \int_a^b \Bigg\{ \underbrace{L(t, \widetilde{x}, \dot{\widetilde{x}})}_{\text{функция от } \dot{\widetilde{x}}} - \underbrace{\left[L(t, \widetilde{x}, \xi(t, \widetilde{x})) + (\dot{\widetilde{x}} - \xi(t, \widetilde{x})) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, \widetilde{x}, \xi(t, \widetilde{x})) \right]}_{\text{касательная к графику этой функции в точке } \xi(t, \widetilde{x})} \Bigg\}\, dt.
\end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральное выражение в (27) как функция от $\dot{\tilde{x}}$ представляет собой разность функции L и линейной функции, график которой касателен к графику L в точке $\dot{\tilde{x}} = \xi(t, \tilde{x})$ (рис. 1.2). Если график L всюду, кроме $\dot{\tilde{x}} = \xi(t, \tilde{x})$ лежит *выше* касательной, то подынтегральное выражение положительно всюду, где $\dot{\tilde{x}} \neq \xi(t, \tilde{x})$, и справедливо утверждение:

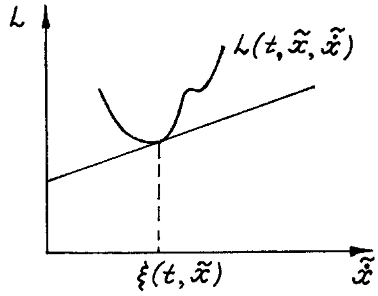

Рис. 3.2.

$$I[\tilde{x}] - I[x] \geq 0,$$

причем равенство достигается только на экстремали.

В частности, это заведомо будет так, если выполнено условие *сильной выпуклости* (*условие Лежандра*)

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} > 0. \tag{28}$$

Итак, если выполнено *условие Лежандра* (28), *то локально экстремали доставляют минимум функционалу* (1).

Упражнение 1.2 Провести все выкладки для функционала

$$I[\vec{x}] = \int_a^b L(t, x, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)\, dt. \tag{29}$$

Здесь условие Лежандра — положительная определенность матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i\, \partial \dot{x}_j} \right\|.$$

Упражнение 1.3 Проверить условие Лежандра во всех классических задачах.

2. Гамильтонова интерпретация. Будем сразу рассматривать n-мерный случай (то есть функционал (29)).

В симплектическом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}_{t,x} \oplus \mathbf{R}_{n+1\, E,p}$ с координатами

$$(t, x; E, p),\ \ t, E \in \mathbf{R},\ \ x, p \in \mathbf{R}^n,$$

и структурной формой

$$\omega = dE \wedge dt + dp \wedge dx \tag{30}$$

рассмотрим подмногообразие $\mathcal{L}$, задаваемое уравнениями

$$E = P(t,x), \quad p = Q(t,x), \tag{31}$$

где функции P и Q определены в (20)–(21). Это многообразие лагранжево, то есть форма (30) на нем равна нулю:

$$dE \wedge dt + dp \wedge dx|_{\mathcal{L}} = d(P(t,x)\,dt + Q(t,x)\,dx) = d(dS), \tag{32}$$

Из соотношения

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} p(t,x,\xi) \tag{33}$$

можно, в силу условия Лежандра (28), однозначно выразить функцию ξ:

$$\xi = \xi(t,x,p). \tag{34}$$

Таким образом, при любых фиксированных (t,x) отображение

$$\begin{array}{ccc} T\mathbf{R}^n & \to & T^*\mathbf{R}^n, \\ \xi & \mapsto & p, \end{array}$$

задаваемое формулой (33), взаимно однозначно. Оно называется *преобразованием Лежандра*.

Обозначим

$$H(t,x,p) = \xi(t,x,p)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t,x,\xi(t,x,p)) - L(t,x,\xi(t,x,p)). \tag{35}$$

Функция (35) называется *преобразованием Лежандра* функции $L(t,x,\dot{x})$ по переменной $\dot{x}$. Преобразование Лежандра лагранжиана мы будем называть *гамильтонианом*.

Упражнение 1.4 Докажите инволютивность преобразования Лежандра:

$$L(t,x,\xi) = p(t,x,\xi)\cdot\frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p(t,x,\xi)) - H(t,x,p(t,x,\xi)), \tag{36}$$

где $p(t,x,\xi)$ определяются из уравнения

$$\xi = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p) \tag{37}$$

и совпадает (почему?) с функцией (33).

Учитывая (21), получаем, что $\mathcal{L}$ — лагранжево многообразие, для которого

$$\{E + H(t,x,p)\}|_{\mathcal{L}} = 0. \tag{38}$$

Выясним теперь, чему соответствуют при преобразовании Лежандра экстремали. Поскольку

$$p = \partial L/\partial x,$$

то

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t,x,\xi(t,x,p)). \tag{39}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \xi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial L}{\partial x} + \xi\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \tag{40}$$

Далее, поскольку $\partial L/\partial \dot{x} = p$, то

$$\xi\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0,$$

и мы получим, что

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Таким образом,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x,p). \tag{41}$$

Далее,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \xi\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{\partial \xi}{\partial p} = \left(\text{поскольку } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 1\right) = \xi\frac{\partial}{\partial p} = \xi = \dot{x},$$

то есть

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p). \tag{42}$$

Итак, *экстремали переходят в решения системы Гамильтона* (41)–(42); при этом $\mathcal{L}$ представляет собой фазовый поток вдоль системы (41)–(42) начального многообразия

$$\mathcal{L}_0 = \{x = x_0,\ p \in \mathbf{R}_n \text{ — произвольное}\} \tag{43}$$

(см. рис. 1.3).

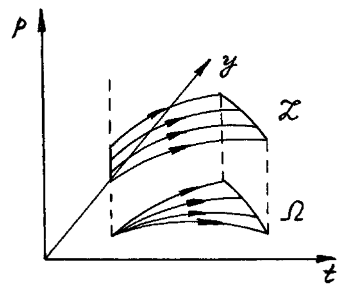

Рис. 3.3.

Приведенные рассуждения допускают следующую модификацию. Пусть начальная точка не фиксирована, а принадлежит некоторому m-мерному многообразию

$$X = \{x = x(\beta), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)\}. \tag{44}$$

Тогда условие трансверсальности

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \tag{45}$$

эквивалентно условию

$$p\,dx|_X = 0, \tag{46}$$

то есть $\mathcal{L}_0$ оказывается *конормальным расслоением* к X, а $\mathcal{L}$, как и выше, фазовый поток многообразия $\mathcal{L}_0$ вдоль системы (41)–(42).

Упражнение 1.5 Провести подробно все рассуждения для этого случая.

Замечание 1.6 Поскольку

$$dS = p\,dx - H(t, x, p)\,dt|_X = 0,$$

интегралы от формы dS по участкам кривых в X равны нулю.

Полученную двойственность между лагранжевым и гамильтоновым формализмом сведем в таблицу. (Последние две строчки этой таблицы пока что еще не определены, соответствующие определение и двойственность будут даны ниже.)

Лагранжева формулировка	Гамильтонова формулировка
Координаты: $(t, x, \dot{x} = \xi)$ на $T\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1_t$	Координаты: (t, x, p) на $T^*\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1_t$
Лагранжиан $L(t, x, \dot{x})$	Гамильтониан $H(t, x, p)$
Условие выпуклости $\left\lVert \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} \right\rVert > 0$	Условие выпуклости $\left\lVert \frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial p} \right\rVert > 0$
Уравнения Эйлера $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$	Система Гамильтона $\dot{x} = H_p(t, x, p)$ $\dot{p} = -H_x(t, x, p)$
Э к с т р е м а л и	Траектории системы Гамильтона
Геодезический наклон $\xi = \xi(t, x)$ — сечение расслоения $T\mathbf{R}^n$	Лагранжево многообразие $p = p(t, x)$ — сечение расслоения $T^*\mathbf{R}^n$
Инвариантный интеграл Гильберта $\int \{L(t, x, \xi(t, x)) + \left(\dot{x} - \xi(t, x)\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \xi(t, x))\}\, dt$	Инвариантный интеграл Картана $\int p\, dx - H(t, p, x)\, dt$
Сопряженные точки экстремали	Точки пересечения траектории с циклом особенностей лагранжева многообразия
Индекс Морса	Индекс Маслова