1 Сопряженные точки и отсутствие экстремума (непараметрический случай)

Сопряженные точки. Система в вариациях. Вторичный лагранжиан и гамильтониан. Однозначность покрытия и сопряженные точки. Теорема о несуществовании минимума.

1. Система уравнений в вариациях. В предыдущей лекции были сформулированы достаточные условия минимума функционала

$$I[x] = \int\limits_a^b L(t, x, \dot{x})\, dt \tag{1}$$

на заданной экстремали, а именно

– *условие Лежандра*
$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} > 0$$

– *условие однократности покрытия.*

В то время как смысл условия Лежандра ясен, второе условие пока что представляется более туманным и хотелось бы выяснить, является ли это условие порождением выбранного нами метода доказательства, или же оно действительно существенно. Этому и посвящена данная лекция.

Напомним, прежде всего, формулировку условия однократности покрытия. Пусть экстремаль
$$x = x(t),\ \ (x = (x^1, \dots, x^n),\ t \in [a, b])$$
включена в семейство экстремалей

$$x(t, \alpha),\ \ |\alpha| < \varepsilon,$$

где $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ — n-мерный параметр семейства, причем

$$x(t, 0) = x(t),\ \ x(a, \alpha) \equiv x_0,\ \ \dot{x}(a, \alpha) = \alpha + \dot{x}(a).$$

Тогда, очевидно, якобиан

$$J = \det \left\| \frac{\partial x^i(t, \alpha)}{\partial \alpha^j} \right\| \stackrel{\text{def}}{=} \det \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}$$

удовлетворяет условиям
$$J\big|_{t=a} = 0, \quad J\big|_{t=a+\delta} \neq 0$$

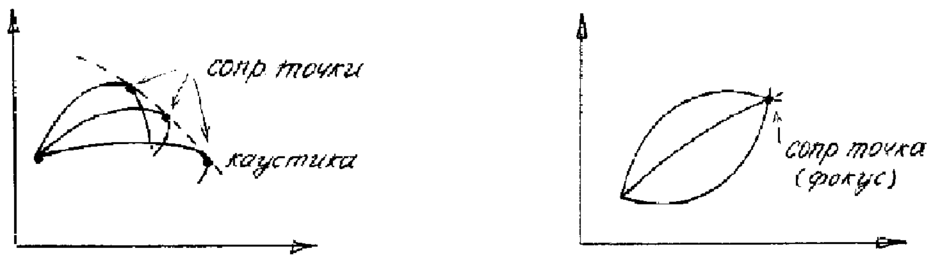

Рис. 1:

при достаточно малых δ. Условие однократности покрытия заключается в том, что $J \neq 0$ при $|\alpha| < \varepsilon$ для всех $t \in (a, b]$; при этом условии, в силу теоремы о неявной функции, траектории $x(t, a)$ действительно будут однократно покрывать некоторую "трубчатую окрестность" траектории $x(t)$.

Поскольку в действительности нас интересует лишь поведение семейства экстремалей при $\alpha \to 0$, естественно перейти к инфинитезимальным величинам и рассмотреть производные

$$X = \left.\frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Эти производные удовлетворяют т.н. *системе уравнений в вариациях*.

Напомним, как получаются уравнения в вариациях. Пусть

$$F(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0 \tag{2}$$

— исходное уравнение или система уравнений, $x(t)$ — исследуемое решение, которое мы включим в семейство решений

$$x = x(t, \alpha), \quad x(t, \alpha)|_{\alpha=0} = x(t).$$

Произведем линеаризацию этого семейства:

$$x(t, \alpha) = x(t, 0)(= x(t)) + \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, 0)\alpha + O(\alpha^2).$$

Уравнение (система) в вариациях — это уравнение для

$$X = \frac{\partial x}{\partial \alpha}(t, 0),$$

то есть для линейной части семейства. Чтобы получить его, продифференцируем исходное уравнение по α и положим $\alpha = 0$. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t)\,\ddot{X} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t)\,\dot{X} + \frac{\partial F}{\partial x}(\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t)X = 0.$$

Это и есть уравнение в вариациях для (2).

2. Сопряженные точки. Критерий сопряженности. План наших дальнейших рассуждений состоит в следующем. Пусть точка t^* — точка на отрезке $(a, b]$, в которой нарушается условие однократности покрытия. Такую точку будем называть точкой, *сопряженной* к a. Две типичные ситуации сопряженных точек показаны на рис. 1.

Важность понятия сопряженной точки определяется следующей теоремой.

Теорема 1.1 *Если экстремаль $x = x(t)$ содержит сопряженную точку t^* внутри интервала (a, b), то $x(t)$ не реализует минимума функционала* (1).

Доказательство этой теоремы будет основано на следующем критерии сопряженности точки.

Теорема 1.2 *Для того, чтобы точка t^* была сопряженной к a, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение (X, P) системы в вариациях для системы Гамильтона такое, что $X(a) = X(t^*) = 0$.*

Для *доказательства* этого предложения вначале убедимся в том, что имеет место "коммутативная диаграмма", показанная на рис. 4.2. Здесь вторичный функционал $\overline{I}[x]$ определен формулой (8), а вторичный гамильтониан — формулой (10) (см. ниже).

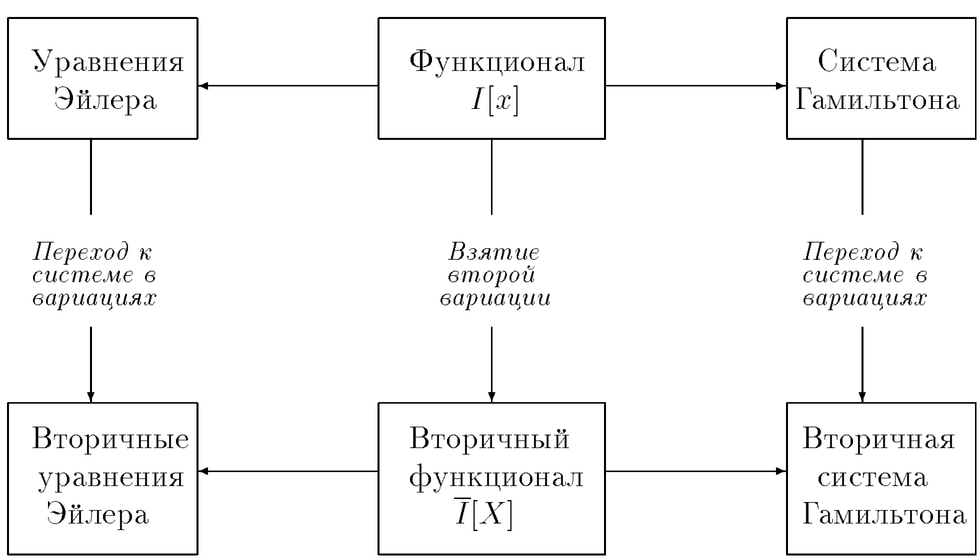

Рис. 4.2.

Затем, используя решение системы Гамильтона для функционала $\overline{I}[X]$, соответствующее в указанном выше смысле сопряженной точке, строим такую вариацию $X^*[t]$ кривой $x(t)$, что $\delta^2 I[X^*] < 0$, откуда немедленно следует утверждение теоремы.

Итак, приступим к реализации нашей программы.

а) *Коммутативность левого квадрата на рис.* 4.2

Построим систему в вариациях для уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, (t,\alpha), \dot{x}\,(t,\alpha))\right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t,\alpha), \dot{x}\,(t,\alpha)), \tag{3}$$

соответствующих функционалу (1). Дифференцируя (3) по переменным α_i и полагая $\alpha = 0$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}. \tag{4}$$

Обозначая

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = X, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{x}} = A, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} = B, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial x} = C, \tag{5}$$

(X — вектор, A, B, C — матрицы) получаем уравнения в вариациях в виде

$$\frac{d}{dt}(A\,\dot{X} + {}^tBX) = B\,\dot{X} + CX. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что (6) — это уравнения Эйлера для лагранжиана

$$\overline{L}(t, X, \dot{X}) = \frac{1}{2}[\,{}^t\dot{X}\,A\,\dot{X} + 2\,{}^tXB\,\dot{X} + {}^tXCX], \tag{7}$$

который мы будем называть *вторичным лагранжианом*.

Заметим, что из условия Лежандра вытекает, что

$$\det A \neq 0.$$

Обозначим через $\overline{I}$ функционал

$$\overline{I}[X] = \int_a^b \overline{L}(t, X, \dot{X})\,dt. \tag{8}$$

Лемма 1.3 *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{2}\delta^2 I[x] \overset{def}{=} \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} I[x(t,\alpha)]\bigg|_{\alpha=0} = \int_a^b \overline{L}dt \overset{def}{=} \overline{I}[X]. \tag{9}$$

Доказательство проводится прямой выкладкой, которую мы оставим читателю в качестве упражнения.

б) *Коммутативность правого квадрата на рис.* 4.2

Вычислим гамильтониан $\overline{H}$, соответствующий функционалу (9). (Будем называть его *вторичным гамильтонианом*). По определению, $\overline{H}$ есть преобразование Лежандра от $\overline{L}$,

$$\overline{H} = \{ {}^tP \dot{X} - \overline{L}(t, X, \dot{X})\}\Big|_{\dot{X}=\dot{X}(t,X,P)}, \tag{10}$$

где $\dot{X}=\dot{X}\,(t, X, P)$ — решение системы уравнений

$$P \left(= \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{X}}\right) \equiv A \dot{X} + {}^tBX. \tag{11}$$

Решая систему (11) относительно $\dot{X}$ (что возможно, т.к. $\det A \neq 0$) и подставляя результат в (10), получаем

$$\overline{H}(t, X, P) = \frac{1}{2}\{ {}^tP \tilde{A} P + 2\,{}^tP \tilde{B} X + {}^tX \tilde{C} X\}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{A}= A^{-1}, \quad \tilde{B}= A^{-1} \cdot {}^tB, \quad \tilde{C}= -C + BA^{-1} \cdot {}^tB. \tag{13}$$

Проверим, что система Гамильтона для $\overline{H}$ совпадает с уравнениями в вариациях для исходной системы Гамильтона. Действительно,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}\,(t, x, p), \tag{14}$$

где $\dot{x}\,(t, x, p)$ определяется из уравнения

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x}\,(t, x, p)). \tag{15}$$

Мы имеем

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p} = \frac{\partial \dot{x}\,(t, x, p)}{\partial p} = \tilde{A}, \tag{16}$$

поскольку

$$A\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = E. \tag{17}$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial x} = \frac{\partial \dot{x}\,(t, x, p)}{\partial x} = \tilde{B}, \tag{18}$$

поскольку

$$ {}^tB + A\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\, \partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = 0. \tag{19} $$

Наконец,

$$ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{\partial L}{\partial x}(t, x, \dot{x}\,(t, x, p))\right\} = -\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = -C + BA^{-1}\cdot {}^tB - \tilde{C}\,. \tag{20} $$

Итак,

$$ \tilde{A} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p}, \quad \tilde{B} = \frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial x}, \quad \tilde{C} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial x}. \tag{21} $$

Далее, система Гамильтона для вторичного гамильтониана $\overline{H}$ имеет вид

$$ \begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial \overline{H}}{\partial P} = \tilde{A}\, P + \tilde{B}\, X, \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \overline{H}}{\partial X} = -{}^tBP - \tilde{C}\, X. \end{aligned} \tag{22} $$

Выпишем систему в вариациях для исходной системы Гамильтона. Согласно (21),

$$ \begin{aligned} \dot{X} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}H_p(t, x, p) = H_{pp}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + H_{px}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \tilde{A}\, P + \tilde{B}\, X, \\ \dot{P} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial \alpha}H_x(t, x, p) = -H_{xx}\frac{\partial x}{\partial \alpha} - H_{xp}\frac{\partial p}{\partial \alpha} = -{}^t\tilde{B}\, P - \tilde{C}\, X. \end{aligned} \tag{23} $$

Таким образом, системы (22) и (23) совпадают, что и требовалось доказать.

в) *Связь однократности покрытия и сопряженной точки.*

Пусть

$$ (x(\alpha, t), p(\alpha, t)) $$

— решение исходной системы Гамильтона. Тогда, как следует из сказанного выше, производные

$$ \frac{\partial x}{\partial \alpha}(0, t), \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha}(0, t) $$

суть решение вторичной системы Гамильтона.

Условие однократности покрытия в окрестности траектории $x = x(0, t)$

$$ \det \partial x / \partial \alpha(0, t) \neq 0 $$

может быть геометрически интерпретировано как условие однозначной проектируемости *лагранжева многообразия* $\mathcal{L}_t$, задаваемого уравнениями

$$ x = x(\alpha, t), \quad p = p(\alpha, t) $$

на координатную плоскость $(x^1, \ldots, x^n)$. Итак, однократность покрытия нарушается в точках t^*, где

$$\det \frac{\partial x}{\partial \alpha}(0, t^*) = 0$$

— точках пересечения траектории $x(t)$ с циклом особенностей проекции $\mathcal{L}_t \to \mathbf{R}^n_x$. Такие точки t^*, называются *сопряженными* точками.

Дадим эквивалентную формулировку. Поскольку

$$\det \frac{\partial x}{\partial \alpha}(0, t^*) = 0,$$

существует отличный от 0 вектор $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ такой, что

$$\frac{\partial x^j}{\partial \alpha^i}(0, t^*)\xi^i = 0. \tag{24}$$

Обозначим через $X = X(t)$ вектор

$$X^j(t) = \frac{\partial x^j}{\partial \alpha^i}(0, t)\xi^i. \tag{25}$$

Вектор $X(t)$ является решением вторичной системы Гамильтона, причем

$$X(a) = X(t^*) = 0. \tag{26}$$

Теперь мы можем дать определение сопряженной точки, эквивалентное введенному выше.

Определение 1.4 Точка t^* называется *сопряженной* к точке $t = a$ на экстремали $x(t)$, если существует решение $X(t)$ вторичной системы Гамильтона, удовлетворяющее (26). Размерность пространства таких решений называется *кратностью* сопряженной точки.

3. Доказательство основной теоремы.

г) *Доказательство теоремы* 1.1.

Докажем теперь сформулированную в начале лекции основную теорему 1.1.

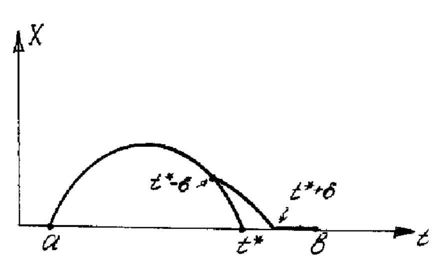

Рис. 4.3.

Пусть $X(t)$ — решение вторичной системы Гамильтона, удовлетворяющее условиям (26). Доопределим $X(t)$ нулем на отрезке $[t^*, b]$; в результате получим кусочно-гладкую кривую X на отрезке $t \in [a, b]$. Поскольку "нулевая" кривая $X_0(t) \equiv 0$ доставляет минимум функционалу $\overline{I}[X]$ на $[a, t^*]$, а $X(t)$ — экстремаль, имеем

$$\overline{I}(X) = 0.$$

Соединим точки $(t-\varepsilon, X(t-\varepsilon))$ и $(t+\varepsilon, 0)$ отрезком вторичной экстремали. Получим новую кусочно-гладкую кривую $\widetilde{X}$ (см. рис. 4.3).

Заметим, что $\overline{I}[\widetilde{X}] < 0$, поскольку интеграл по добавленному отрезку вторичной экстремали меньше, чем интеграл по выброшенной ломаной от $t-\varepsilon$ до $t+\varepsilon$.

Сглаживая $\widetilde{X}$, можно получить гладкую кривую X^* такую, что $\overline{I}[X^*] < 0$.

Определим кривую $x^*(t)$ равенством

$$x^*(t) = x(t) + uX^*(t). \tag{27}$$

В силу (9)

$$I[x^*] = I[x] + u^2\overline{I}[X^*] + O(u^3) < I[x] \tag{28}$$

при достаточно малых u.

Таким образом, x не является кривой локального минимума для I. Теорема доказана.