1 Сопряженные точки и отсутствие экстремума (параметрический случай)

Вторичный функционал и вторичные уравнений Эйлера в параметрическом случае. Сопряженные точки. Теорема об отсутствии минимума при наличии сопряженных точек. Гамильтонова трактовка и устранение неоднозначностей.

1. Вторичные функционалы и вторичные уравнения Эйлера. Будем рассматривать функционал

$$I[l] = \int_l L(x, \dot{x})\, dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t))\, dt, \tag{1}$$

где l — кривая, соединяющая точки $M_0(x_0)$ и $M_1(x_1)$ в $\mathbf{R}^n$,

$$l = \{x = x(t)\},\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1.$$

Предполагается, что лагранжиан $L(x, \dot{x})$ положительно однороден первой степени по $\dot{x}$, так что значение функционала (1) не зависит от параметризации ориентированной кривой.

Пусть $l = \{x = x(t)\}$ — экстремаль функционала (1). Включим кривую l в семейство кривых $\{l(\alpha)\}_{\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$, где кривая $l(\alpha)$ — деформация кривой l — задается уравнением $x = x(t, \alpha)$, причем

$$x(t, 0) = x(t), \quad x(t_0, \alpha) \equiv x_0, \quad x(t_1, \alpha) \equiv x_1.$$

Прямая выкладка дает

$$I[x(t, \alpha)] = I[x(t)] + \frac{1}{2}\delta^2 I[x(t), X(t)]\alpha^2 + O(\alpha^3), \tag{2}$$

где

$$X(t) = \left.\frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha = 0} \tag{3}$$

— первая вариация кривой (вариационное поле вдоль l),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta^2 I[x(t), X(t)] &= \overline{I}[X(t)] \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\, \partial \dot{x}^j} \dot{X}^i \dot{X}^j + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} X^i \dot{X}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} X^i X^j \right] dt. \end{aligned} \tag{4}$$

$\overline{I}[X]$ называется *вторичным функционалом*, а соответствующие уравнения Эйлера — *вторичными уравнениями Эйлера*.

2. Сопряженные точки. Нашей задачей будет:

– определить сопряженные точки, то есть те точки, для которых существует решение вторичных уравнений Эйлера, обращающихся в 0 на концах соответствующего интервала;

– в случае наличия сопряженных точек, построить вариацию $X(t)$ такую, что $\overline{I}[X(t)] < 0$.

Одна из сложностей, как мы увидим, заключается в том, что вторичная задача вырождена.

Исследование вторичной задачи будем проводить по следующему плану. Обозначим через $X_0(t) = \dot{x}(t)$ касательный вектор к кривой l в точке $x(t)$. В нормальном пучке к l в точке $x(t)$ введем (гладко зависящий от t) ортогональный базис

$$X_1(t), \ldots, X_{n-1}(t)$$

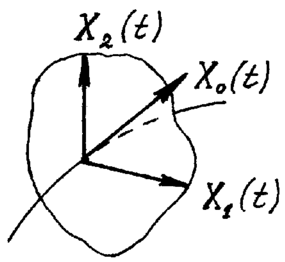

Рис. 6.1.

(см. рис. 1.1). Первая вариация $X(t)$ может быть тогда записана в виде

$$X(t) = X'(t) + X''(t), \tag{5}$$

где

$$X'(t) = X_0(t)\varphi(t), \quad X''(t) \in \mathcal{L}[X_1(t), \ldots, X_{n-1}(t)], \tag{6}$$

$\mathcal{L}[a, \ldots, z]$ — линейная оболочка векторов $a, \ldots, z$. Мы покажем, что для любой функции $\varphi(t)$ функция $X_0(t) \cdot \varphi(t)$ является вторичной экстремалью, причем

$$\overline{I}[X_0(t)\varphi(t)] = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x^i} X_0^i(t)\varphi^2(t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{7}$$

— константа, зависящая только от значений $\varphi(t_0)$, $\varphi(t_1)$. Поскольку $\overline{I}[X]$ — квадратичный функционал, отсюда вытекает, что

$$\overline{I}[X] = \overline{I}[X' + X''] = \overline{I}[X'] + 2\delta\overline{I}[X', X''] + \overline{I}[X''] = \overline{I}[X''] + C, \tag{8}$$

где C зависит только от значений $X(t_1)$, $X(t_2)$. Таким образом, *изучение функционала* $\overline{I}[X]$ *сводится к изучению этого функционала на нормальном пучке.*

Такой результат естественен. Действительно, причиной вырожденности является то обстоятельство, что инфинитезимально сдвиг кривой вдоль $X_0(t)$ сводится к перепараметризации этой кривой, и *любая деформация кривой l есть, при соответствующем выборе параметризации, деформация вдоль нормального пучка* (рис. 1.2). Из условия Лежандра вытекает невырожденность $\overline{I}[X]$ на нормальном пучке.

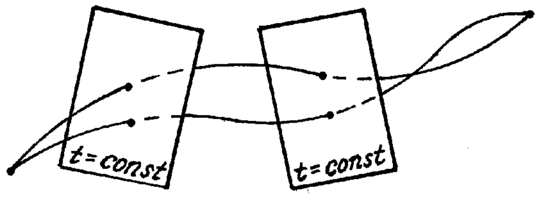

Рис. 6.2.

Мы можем дать следующее определение сопряженной точки:

Точка $M^*(x^*) \in l$ сопряжена к точке $M_0(x_0)$ на экстремали l тогда и только тогда, когда существует вторичная экстремаль $X''(t) \neq 0$ функционала $\overline{I}[X]$ на нормальном пучке такая, что $X''(t) = 0$ в точках M_0 и M^*.

Теорема 1.1 *Если экстремаль $l[M_0, M_1]$ содержит сопряженную к M_0 точку M^*, как внутреннюю точку l, то l не задает минимум функционала $I[l]$.*

Пусть

$$\pi : \mathcal{L}[X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}] \to \mathcal{L}[X_1, \ldots, X_{n-1}] \tag{9}$$

— проекция на нормальный пучок вдоль X_0. Имеют место следующие соотношения между экстремалями функционала $\overline{I}[X]$ и его ограничения на нормальный пучок:

- если $X(t)$ — экстремаль функционала $\overline{I}[X]$, то $\pi(X(t))$ — экстремаль $\overline{I}[X]$ на нормальном пучке;
- если $X(t)$ — экстремаль функционала $\overline{I}[X]$ на нормальном пучке, то $X(t)$ — экстремаль функционала $\overline{I}[X]$.

С учетом этих соотношений можно дать эквивалентное определение сопряженной точки:

Определение 1.2 Точка $M^*(x^*) \in l$ *сопряжена* к точке $M_0(x_0)$ на экстремали l тогда и только тогда, когда существует вторичная экстремаль $X(t)$ функционала $\overline{I}[X]$, не всюду коллинеарная $\dot{x}\ (t) = X_0(t)$ и обращающаяся в нуль в точках M_0 и M^*.

Пусть $H(x, p)$ — допустимый гамильтониан, то есть функция $H(x, p)$ положительно однородна степени 1 по p и

$$H(x, p)|_{\mathrm{Im}\partial L/\partial \dot{x}} = 1. \tag{10}$$

Рассмотрим уравнения в вариациях для системы Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{X} = H_{pp}(x,p)\,P + H_{px}(x,p)\,X, \\ \dot{P} = -H_{xp}(x,p)\,P - H_{xx}(x,p)\,X. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть $(X(t), P(t))$ — решение системы (11), причем $X(t) \neq 0$ и $X(t_0) = X(t^*) = 0$. Тогда $X(t)$ является вторичной экстремалью. Действительно, рассмотрим решение

$$x = x(\alpha, t), \quad p = p(\alpha, t)$$

системы Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(x,p), \\ \dot{p} = -H_x(x,p) \end{cases} \tag{12}$$

с начальными условиями

$$x(\alpha, t_0) = x_0 + \alpha X(t_0), \quad p(\alpha, t_0) = p_0 + \alpha P(t_0). \tag{13}$$

В силу единственности решения вторичной системы Гамильтона (11) имеем

$$X(t) = \left.\frac{\partial x(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}, \quad P(t) = \left.\frac{\partial p(\alpha,t)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}.$$

Поскольку $x(\alpha,t)$ — решение уравнений Эйлера, $X(t)$ — вторичная экстремаль. Далее, поле $X(t)$ не параллельно $\dot{x}\,(t)$ всюду. Действительно, предположим, что $X(t) = \dot{x}\,\varphi(t)$. Мы имеем из (11)

$$p\,\dot{X} = pH_{pp}P + pH_{px}X, \tag{14}$$

откуда

$$p(\ddot{x} + \dot{x}\,\varphi) = H_x \cdot \dot{x}\,\varphi, \tag{15}$$

($pH_{pp} = 0$, $pH_{px} = H_x$ в силу тождеств Эйлера), и, поскольку

$$p\,\dot{x} = pH_p = H \neq 0, \quad p\,\ddot{x} = p(H_{pp}\,\dot{p} + H_{px}\,\dot{x}) = H_x \cdot \dot{x}, \tag{16}$$

получаем $\dot{\varphi} = 0$, то есть φ=const, что противоречит условиям $X(t_0) = 0$, $X(t) \not\equiv 0$.

3. Исследование вторичной задачи и основная теорема. Перейдем к подробному исследованию вторичной задачи.

а) Покажем, что $X_0(t) \cdot \varphi(t)$ — экстремаль для любой функции $\varphi(t)$. Действительно, вторичные уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i\,\partial \dot{x}^j}\,\dot{X}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} X^j\right\} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\,\dot{X}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} X^j. \tag{17}$$

Подставляя в (17) $X = \dot{x} \cdot \varphi(t)$ и используя уравнения Эйлера и тождества Эйлера, получаем
для левой части:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}(\ddot{x}^j \varphi + \dot{x}^j \dot{\varphi}) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j \varphi\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\varphi \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right]\right\}$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\varphi \frac{\partial L}{\partial x^i}\right\} = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial x^i} + \varphi\left[\dot{x}^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} + \ddot{x}^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\right]; \qquad (18)$$

для правой части:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}(\ddot{x}^j \varphi + \dot{x}^j \dot{\varphi}) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^j \varphi = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial x^i} + \varphi\left[\dot{x}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} + \ddot{x}^j \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}\right]. \qquad (19)$$

б) Покажем, что если концы кривой $X(t)\varphi(t)$ фиксированы, то

$$\overline{I}[X_0(t)\varphi(t)] = \text{const}\,. \qquad (20)$$

Действительно, получаем, используя тождества Эйлера и уравнения Эйлера,

$$\begin{aligned}
\overline{I}[X_0(t)\varphi(t)] &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}(\ddot{x}^i \varphi + \dot{x}^i \dot{\varphi})(\ddot{x}^j \varphi + \dot{x}^j \dot{\varphi}) + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j}(\ddot{x}^j \varphi + \dot{x}^j \dot{\varphi}) \dot{x}^i \varphi \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^i \dot{x}^j \varphi\Bigg\} dt \\
&= \{\text{в силу тождеств Эйлера}\} \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Bigg\{\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \ddot{x}^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{x}^i\right] \ddot{x}^j \varphi^2 \qquad (21) \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^j\right] \dot{x}^i \varphi^2 + 2\frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{\varphi} \varphi\Bigg\} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) \ddot{x}^i \varphi^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right) \dot{x}^i \varphi^2 + \frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i \frac{d}{dt}(\varphi^2)\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial L}{\partial x^i} \ddot{x}^i \varphi^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\right) x^i \varphi^2 + \frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i \frac{d}{dt}(\varphi^2)\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i \varphi^2\right) dt = \frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i \varphi^2\Bigg|_{t_0}^{t_1} = \text{const}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

в) Исследуем теперь структуру $\overline{I}[X]$. Пусть

$$X = X' + X''$$

в соответствии с (5) – (6), тогда, поскольку $\overline{I}[X]$ — квадратичный функционал, и $X'(t)$ — экстремаль, получаем

$$\begin{aligned}
\overline{I}[X] &= \overline{I}[X'+X''] \\
&= (\text{квадратичный функционал}) \\
&= \overline{I}[X'] + \overline{I}[X''] + \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} \dot{X}'^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} X'^i \right] \dot{X}''^j \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{X}'^i + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x^i} X'^i \right] X''^j \right\} dt \\
&= \{X'(t) - \text{экстремаль}\} \\
&= \overline{I}[X'] + \overline{I}[X''] + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} \dot{X}'^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \, \partial x^i} X'^i \right] X''^i \right\} dt \qquad (23) \\
&= \overline{I}[X'] + \overline{I}[X''] + \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} (\ddot{x}^i \varphi + \dot{x}^i \dot{\varphi}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \, \partial x^i} \dot{x}^i \varphi \right] X''^j \Bigg|_{t_0}^{t_1} \\
&= \frac{\partial L}{\partial x^j} X''^j \varphi \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \overline{I}[X'] + \overline{I}[X''] = (\text{в силу } (20)) \\
&= \overline{I}[X''] + C.
\end{aligned}$$

Исследуем теперь $\overline{I}[X]$ на нормальном пучке. Для удобства обозначений условимся, что суммирование по повторяющимся "штрихованным" индексам выполняются от 1 до $k-1$. Пусть первая вариация $X(t)$ кривой l лежит в нормальном пучке, то есть

$$X(t) = \sum_{k'=1}^{n-1} \varphi^{k'}(t) X_{k'}(t) = \varphi^{k'}(t) X_{k'}(t). \qquad (24)$$

Имеем

$$\dot{X}^i(t) = \dot{\varphi}^{k'}(t) X^i_{k'}(t) + \varphi^{k'}(t) \dot{X}^i_{k'}(t), \qquad (25)$$

$$\begin{aligned}
\overline{I}[X] = \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} X^i_{k'} X^j_{l'} \right] \dot{\varphi}^{k'} \dot{\varphi}^{l'} + 2 \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} X^i_{k'} X^j_{l'} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial x^j} \dot{X}^i_{k'} X^j_{l'} \right] \varphi^{k'} \dot{\varphi}^{l'} \\
& + \left[\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} X^i_{k'} X^j_{l'} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} \dot{X}^i_{k'} \dot{X}^j_{l'} + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^j} X^i_{k'} \dot{X}^j_{l'} \right] \varphi^{k'} \varphi^{l'} \Bigg\} dt \stackrel{\text{def}}{=} \overline{I}[\varphi]. \qquad (26)
\end{aligned}$$

В базисе $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ матрица квадратичной формы

$$\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} X^i_{k'} X^j_{l'} \right] \dot{\varphi}^{k'} \dot{\varphi}^{l'}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ . & & . & & \\ . & & & . & \\ . & & & & . \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & A & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & & & & \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = A, \tag{27}$$

при этом $\det A \neq 0$, поскольку

$$\operatorname{rank} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \, \partial \dot{x}^j} = n - 1.$$

Введем *условия Лежандра*: *матрица A положительно определена.*

Тогда $\overline{I}[X]$ — непараметрический функционал на нормальном пучке, удовлетворяющий условию Лежандра.

Следующие два утверждения дают связь между экстремалями функционалов $\overline{I}[X]$ и $\overline{I}[\varphi]$.

1°. *Если $X(t)$ — экстремаль функционала $\overline{I}[X]$, то $\pi[X(t)]$ — экстремаль функционала $\overline{I}[\varphi]$.*

Это вытекает из свойства а) и линейности вторичных уравнений Эйлера.

2°. *Если $X(t)$ — экстремаль функционала $\overline{I}[X]$, и $X(t)$ лежит в нормальном пучке, то*

$$X(t) = \varphi^{k'} X_{k'}, \ \textit{то} \ \varphi^{k'}(t) \ \textit{— экстремаль функционала} \ \overline{I}[\varphi].$$

Доказательство проводится прямой выкладкой.

Если $\varphi^{k'}$ — экстремаль функционала $\overline{I}(\varphi)$, то $X = \varphi^{k'} X_{k'}$ — экстремаль функционала $\overline{I}(\varphi)$.

Доказательство. В самом деле, если $\varphi^{k'}$ — экстремаль, то в силу невырожденности, $\varphi^{k'}$ доставляет локальный минимум для функционала $\overline{I}[\varphi]$. Теперь, поскольку

$$\overline{I}[X] = I[\pi(X)] + C, \tag{28}$$

причем если X имеет те же концы, что и $\pi(X)$, то $C = 0$, из (28) следует, что $X = \varphi^{k'} X_{k'}$ — экстремаль функционала $\overline{I}(\varphi)$.

Доказательство теоремы 1.1 проведем аналогично непараметрическому случаю. Поскольку $\overline{I}[\varphi]$ — невырожденный параметрический функционал, мы можем построить $\varphi^{k'}(t)$ такие, что

$$\overline{I}[\varphi^{k'}(t)] < 0, \quad \varphi^{k'}(t_0) = \varphi^{k'}(t_1) = 0.$$

Определим деформацию

$$x(t,u) = x(t) + u\varphi^{k'}(t)X_{k'}(t). \tag{29}$$

Тогда

$$I[x(t,u)] = I[x(t)] + u^2\overline{I}[\varphi^{k'}X_{k'}] + O(u^3) = I[x] + u^2\overline{I}[\varphi] + O(u^3). \tag{30}$$

Отсюда следует, что при малых $u \neq 0$

$$I[x(t,u)] < I[x(t)].$$

2 Об индексе инерции второй вариации функционала. Теорема конечности

Изучение отрицательного индекса инерции второй вариации. Индекс Морса. Теорема конечности.

Пусть $x_0(t)$ — экстремаль функционала I

$$x_\alpha(t) = x_0(t) + \alpha X(t) + O(\alpha^2).$$

Тогда

$$I[x_\alpha(t)] = I[x_0(t)] + \alpha^2 \overline{I}[X(t)] + O(\alpha^3). \tag{31}$$

Из предыдущих лекций известно, что если $x_0(t)$ содержит внутри отрезка $[t_0, t_1]$ сопряженную точку, то существует $X(t)$ такая, что

$$X(t_0) = X(t_1) = 0; \quad \overline{I}[X(t)] < 0, \tag{32}$$

то есть *квадратичная форма* $\overline{I}[X(t)]$ *обладает ненулевым отрицательным индексом инерции.*

1. Поставим задачу об изучении отрицательного индекса инерции формы $\overline{I}[X]$ в пространстве кусочно-гладких непрерывных вариационных полей $X(t)$ вдоль $x_0(t)$, таких, что $X(t_0) = X(t_1) = 0$.

Изучение будем вести с помощью конечномерной аппроксимации. Пусть

$$\sigma = \{\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N = t_1\} \tag{33}$$

— разбиение отрезка $[t_0, t_1]$,

$$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} < \rho, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{34}$$

где $\rho > 0$ выбрано таким, что никакой отрезок экстремали длины $\leq \rho$ не содержит сопряженных точек.

Пусть $[z]$ — векторное пространство точек

$$z = (z_1, \ldots, z_{N-1}), \quad z_i \in \mathbf{R}^n. \tag{35}$$

Обозначим через C_z ломаную с точками излома $\tau_1, \ldots, \tau_{N-1}$ такую, что

$$C_z(t_0) = C_z(t_1) = 0;$$
$$C_z(\tau_j) = z_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{36}$$

(см. рис. 2.3).

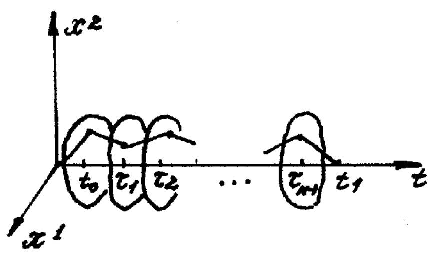

Рис. 7.3.

Все звенья C_z являются вторичными экстремалями на любом отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Множество всевозможных ломаных $\{C_z\}$ является линейным пространством конечной размерности:

$$\dim \{C_z\} = (N-1)n.$$

Сужение

$$Q_\sigma(z) = \overline{I}(C_z) \tag{37}$$

функционала $\overline{I}$ на конечномерное линейное пространство $\{C_z\}$ будем называть *конечномерной аппроксимацией* $\overline{I}$.

Введем нужные обозначения. Пусть

M_σ — отрицательный индекс инерции Q_σ;

N_σ — размерность пространства вырождения Q_σ;

$M^*_\sigma = M_\sigma + N_\sigma$.

и аналогичные обозначения для функционала $\overline{I}$:

$\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{M}^* = \overline{M} + \overline{N}$ — те же величины для функционала $\overline{I}$ (априори они могут быть бесконечны).

Предложение 2.1 1) Числа M_σ, N_σ, M^*_σ не зависят от выбора разбиения σ (с $\Delta\tau_j < \rho$).

2) Имеют место равенства $M_\sigma = \overline{M}$, $N_\sigma = \overline{N}$, $M^*_\sigma = \overline{M}^*$.

3) Числа $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{M}^*$ могут быть вычислены через характеристики сопряженных точек.

Доказательство. 1) Достаточно показать, что величины M_σ, N_σ, M^*_σ не изменяются при измельчении разбиения.

Пусть

$$\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N = t_1\}, \tag{38}$$

$$\sigma' = \{t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{i_0} < \overline{\tau} < \tau_{i_0+1} < \ldots < \tau_N = t_1\} \tag{39}$$

— два разбиения и пусть π — плоскость в пространстве $[z]$, на которой $Q_\sigma(z)$ отрицательно определена. Вложим π в пространство $[z, \overline{z}]$, полагая $\overline{z} = C_z(\overline{\tau})$. Тогда, очевидно, $C_{z,\overline{z}} = C_z$.

Если $(z, \overline{z}) \neq 0$ (и, следовательно, $z \neq 0$), то на плоскости π

$$Q_{\sigma'}(z, \overline{z}) = \overline{I}(C_{z,\overline{z}}) = \overline{I}(C_z) = Q_\sigma(z) < 0. \tag{40}$$

Значит,

$$M_{\sigma'} \geq M_\sigma. \tag{41}$$

Пусть π — плоскость в пространстве $[z, \overline{z}]$, на которой форма $Q_{\sigma'}(z, \overline{z})$ отрицательно определена, π_1 — проекция π на пространство $[z]$. Для любого $(z, \overline{z})$ экстремали C_z и $C_{z\overline{z}}$ совпадают вне $[\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}]$, а на $[\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}]$ C_z состоит из одного, а $C_{z,\overline{z}}$ — из двух отрезков вторичных экстремалей (см. рис. 2.4).

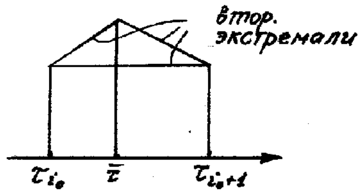

Рис. 7.4.

Поэтому

$$Q_\sigma(z) = \overline{I}(C_z) < \overline{(}C_{z,\overline{z}}) < 0 \tag{42}$$

(интеграл по ломаной меньше интеграла по экстремали). Итак, форма $Q_\sigma(z)$ отрицательно определена на π_1.

Далее, проекция π на π_1 имеет нулевое ядро. В самом деле, если $\pi(z, \overline{z}) = 0$, то $C_z \neq 0$ только на $[\tau_{i_0}, \tau_{i_0+1}]$ (см. рис. 2.5). Если $C_z(\overline{\tau}) \neq 0$, то $\overline{I}[C_z] < 0$, что противоречит условию $\Delta\tau_{i_0+1} < \rho$. Значит, $M_\sigma \geq M_{\sigma'}$, откуда ясно, что $M_\sigma = M_{\sigma'}$. Аналогично доказывается, что $M^*_\sigma = M^*_{\sigma'}$, для чего следует рассмотреть плоскости,

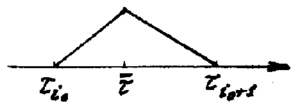

Рис. 7.5.

на которых $Q_\sigma(z)$, $Q_{\sigma'}(z, \overline{z})$ неотрицательно определены. Равенство для N_σ — очевидное следствие уже доказанных.

2) Пусть π — конечномерное подпространство в пространстве кусочно-гладких кривых, на котором форма $\overline{I}$ отрицательно определена,

$$\{X_1(t), \ldots, X_k(t)\}$$

— базис в π.

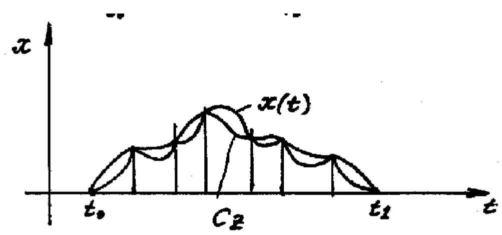

Рис. 7.6.

Пусть σ — разбиение, включающее угловые точки всех $X_j(t)$, $j = 1, \ldots, k$ и такое, что $\Delta\tau_j < \rho$.

Обозначим через π_1 проекцию π на пространство $[z]$, $z_j = X(\tau_j)$ для $X(t) \in \pi$. Пусть $X(t) \not\equiv 0$. Экстремаль C_z совпадает с $X(t)$ в точках τ_j (см. рис. 2.6). На отрезках $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ кривая C_z — вторичная экстремаль, а $X(t)$ — произвольная гладкая кривая. Значит,

$$\overline{I}[C_z] \leq \overline{I}[X(t)] < 0 \tag{43}$$

и, следовательно, Q_σ отрицательно определена на π_1. Проекция невырождена: если проекция $X(t)$ равна 0, то $X(\tau_j)=0$ и, поскольку $\Delta\tau_j<\rho$, имеем $\overline{I}[X(t)]\geq 0$. Так как $\overline{I}$ отрицательно определен на π, то $\overline{I}[X(t)]=0$ и $X(t)=0$ (иначе $\overline{I}[X(t)]<0$). Таким образом, $\dim\,\pi\leq M_\sigma$. Если бы существовало бесконечномерное подпространство, на котором $\overline{I}$ отрицательно определена, мы имели бы $\dim\,\pi\leq M_\sigma$ для любого его конечномерного подпространства π, что, очевидно, невозможно. Итак, $\overline{M}$ конечно, и

$$\overline{M}\leq M_\sigma. \tag{44}$$

Однако, если π — плоскость в $[z]$, на которой $Q_\sigma(z)$ отрицательно определена, то множество кривых вида C_z — подпространство той же размерности, и на нем $\overline{I}$ отрицательно определена. Итак, $\overline{M}\geq M_\sigma$ и, следовательно, $\overline{M}=M_\sigma$. Аналогично доказывается $\overline{M}^*=M_\sigma^*$.

3) Обозначим через $m(t^*)$, $t^*\in[t_1,t_2]$ размерность пространства вторичных экстремалей, обращающихся в нуль в точках t_1 и t^* (в частности, $m(t^*)=0$, если t^* — не сопряженная точка).

Лемма 2.2

$$M_\sigma^*-M_\sigma=m(t_2). \tag{45}$$

Доказательство. Число

$$M_\sigma^*-M_\sigma=N_\sigma$$

есть размерность пространства вырождения $Q_\sigma(z)$, которое (как тривиально доказывается) совпадает со множеством стационарных точек $Q_\sigma(z)$. Далее, z — стационарная точка $Q_\sigma(z)$ тогда и только тогда, когда C_z — вторичная экстремаль.

В самом деле, покажем сначала, что, если точка z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q_\sigma(z)}{\partial z}=0,$$

то

$$\delta\overline{I}(C_z)=0.$$

Пусть $\delta X(t)$ — произвольная кривая, обращающаяся в 0 в точках t_1, t_2. Тогда

$$\delta X(t)=\delta X'(t)+\delta X''(t), \tag{46}$$

где $\delta X'(t)=0$ в точках τ_i, а $\delta X''(t)$ — ломаная экстремаль. Таким образом,

$$\delta\overline{I}(C_z)\cdot\delta X(t)=\delta I(C_z)\cdot\delta X'(t)+\delta I(C_z)\cdot\delta X''(t). \tag{47}$$

Имеем

$$\delta\overline{I}(C_z)\delta X'(t)=0,$$

т.к. C_z — вторичная экстремаль вне $\{\tau_j\}$, $\delta X'(\tau_j)=0$. Далее,

$$\delta\overline{I}(C_z)\delta X''(t)=\frac{d}{d\alpha}\overline{I}\left(C_z(t)+\alpha X''(t)\right)\big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}Q_\sigma\left(z+\alpha z''\right)\big|_{\alpha=0}.$$

Таким образом,

$$\left\{\delta\overline{I}(C_z)\cdot\delta X(t)=\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j}\dot{C}_z^j(t)\right]_{\tau_j}\delta X^i(\tau_j)=0\right\}. \tag{48}$$

Отсюда следует, что функция

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j}\cdot\dot{C}_z^j(t)$$

непрерывна на $[t_1,t_2]$ и, так как матрица $\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}\partial\dot{x}}\right\|$ невырождена, функция $\dot{C}_z^j(t)$ непрерывна на $[t_1,t_2]$, то есть $C_z(t)$ — (вторичная) экстремаль. Обратно, если $C_z(t)$ — вторичная экстремаль, то

$$\delta\overline{I}(C_z)\cdot\delta X(t)=0,$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{d\alpha}\,Q_\sigma(z+\alpha z'')\big|_{\alpha=0}=0$$

для любого z'' и, следовательно,

$$\frac{\partial Q_\sigma(z)}{\partial z}=0.$$

Определение 2.3 Число $\overline{M}$ (отрицательный индекс инерции квадратичной формы $\overline{I}$) называется *индексом Морса*.

Рассмотрим $\overline{M}=\overline{M}(t)$ как функцию конечной точки t интервала.

Лемма 2.4 *Для любого t_0 существует настолько малое $\varepsilon>0$, что справедливо неравенство*

$$\overline{M}(t)\ge\overline{M}(t_0)\quad\textit{при}\quad|t-t_0|<\varepsilon. \tag{49}$$

Доказательство. При $|t-t_0|<\varepsilon$ имеем

$$\overline{M}(t)=M_\sigma(t),$$

где в разбиении σ меняется лишь конечная точка. Коэффициенты $Q_\sigma(z)$ непрерывно зависит от t (теорема о непрерывной зависимости). Пусть π — плоскость, на которой $Q_\sigma^{t_0}(z)$ отрицательно определена. Тогда $Q_\sigma^{t_0}(z)\le-\varepsilon_1$ на единичном шаре плоскости π, и, следовательно, $Q_\sigma^{t}(z)\le-\varepsilon_1/2$ при достаточно малых $t-t_0$.

Аналогично, с использованием положительного индекса инерции, доказывается

Лемма 2.5 *Для любого t_0 существует настолько малое $\varepsilon > 0$, что*

$$\overline{M}^*(t) \leq \overline{M}^*(t_0) \quad \text{при} \quad |t - t_0| < \varepsilon. \tag{50}$$

Лемма 2.6 *$M(t)$ и $\overline{M}^*(t)$ — неубывающие функции переменной t.*

Доказательство. Если $[t_1, t] \subset [t_1, t']$, то разбиение $\sigma'[t_1, t']$ получается дополнением разбиения $\sigma[t_1, t]$, и пространство кривых C_z для разбиения σ совпадает с подпространством пространства $C_{z'}$ для разбиения σ'. Отсюда получаем

$$M_{\sigma'} \geq M_\sigma, \quad N_{\sigma'} \geq N_\sigma,$$

что и требовалось доказать.

Теперь из леммы 2.2 вытекает, что

$$\overline{M}(t) = \overline{M}^*(t)$$

вне сопряженных точек, из лемм 2.4, 2.5 следует, что

$$\overline{M}(t) = \text{const}$$

вне сопряженных точек, а из лемм 2.4, 2.5, 2.6 следует, что

$$\lim_{t \to t^* - 0} \overline{M}(t) = \overline{M}(t^*),$$
$$\lim_{t \to t^* + 0} \overline{M}(t) = \overline{M}^*(t^*) \tag{51}$$

для сопряженной точки t^*.

Итак, справедлива следующая

Теорема 2.7 *Имеет место равенство*

$$\overline{M}(t) = \sum m(t_j), \tag{52}$$

где сумма берется по всем сопряженным точкам отрезка $[t_0, t]$.

Следствие 2.8 (теорема конечности) *Пусть выполнено условие Лежандра. Тогда пространство, где вторичный функционал может быть отрицательно определен, имеет конечную размерность.*