1 Индекс Морса и индекс Маслова

Определение и геометрическая интерпретация индекса Морса. Определение индекса Маслова. Теорема о совпадении индекса Морса с индексом Маслова в случае сильно выпуклого по импульсным переменным гамильтониана.

В данной лекции мы введем понятие индекса Морса и индекса Маслова и покажем, что индекс Морса сопряженной точки равен индексу Маслова пересечения соответствующей траектории системы Гамильтона с циклом особенностей лагранжева многообразия.

1. Индекс Морса. Напомним вначале определение и геометрическую интерпретацию индекса Морса.

Рассматриваются следующие объекты (рис. 1.1):

- γ-экстремаль; α_0 — начальная точка, α^* — сопряженная точка;
- l — траектория системы Гамильтона; s_0 — начальная точка, s^* — точка пересечения с циклом особенностей π;
- L — лагранжево многообразие, отвечающее геодезическому покрытию; X' — цикл особенностей; X — (как правило) огибающая семейства экстремалей.

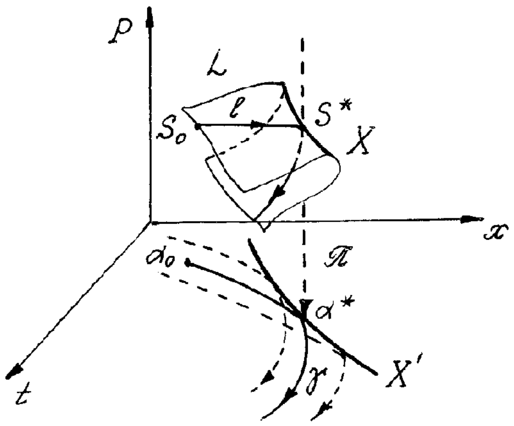

Рис. 8.1.

Индекс Морса $m(t^*)$ точки α^* определяется, как размерность пространства вторичных экстремалей $X(t)$, обращающихся в 0 в точках α^0 и α^*.

Заметим, что точка α^* лежит на проекции $X' = \pi(X)$ цикла особенностей лагранжева многообразия L. Пусть $k = k(t^*)$ — размерность пространства вырождения проекции π (то есть ядра π_*). Если ввести на L координаты (ξ, t), где $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ — локальные координаты на $L_0 = L \cap \{t = 0\}$, а t — время (координата вдоль траектории системы Гамильтона), то

$$k(t^*) = \dim \operatorname{Ker} \left\| \frac{\partial x^i(\xi, t^*)}{\partial \xi^j} \right\|. \tag{1}$$

Ранее было показано, что

$$k(t^*) = m(t^*).$$

В этой лекции будет показано, что

$$k(t^*) = i(t^*),$$

где $i(t^*)$ — индекс Маслова пересечения траектории l с X (в предположении, что H_{pp} — положительно определенная матрица).

2. Индекс Маслова. Напомним, прежде всего, что такое индекс Маслова (детали см. в [Мас], [Мил]). Пусть $L \subset \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$ — произвольное лагранжево многообразие в симплектическом пространстве $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$ со структурной формой $dx \wedge dp$ (то есть подмногообразие, для которого выполнено условие

$$dx \wedge dp|_L = 0). \tag{2}$$

Пусть $s \in L$ – некоторая точка. Тогда, как известно, существует такой набор индексов $I = (i_1, \ldots, i_m) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, что набор функций

$$(x^I, p_{\overline{I}}) = (x^{i_1}, \ldots, x^{i_m}, p_{i_{m+1}}, \ldots, p_{i_n})$$

является системой локальных координат на L в окрестности точки s (здесь $\overline{I} = \{i_{m+1}, \ldots, i_n\}$ — дополнение к I в множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$). В окрестности точки s определено действие $S_I(x^I, p_{\overline{I}})$ — решение уравнения Пфаффа

$$dS_I(x^I, p_{\overline{I}}) = (p_I dx^I - x^{\overline{I}} dp_{\overline{I}})\Big|_L ; \tag{3}$$

Разрешимость уравнения (3) в окрестности точки s следует из леммы Пуанкаре, поскольку форма в правой части равенства (3) замкнута:

$$\begin{aligned} d(p_I dx^I - x^{\overline{I}} dp_{\overline{I}})\Big|_L &= (dp_I \wedge dx^I - dx^{\overline{I}} \wedge dp_{\overline{I}}\Big|_L \\ &= (dp \wedge dx)\big|_L = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Последняя форма равна нулю по определению лагранжевости (2). Многообразие L в окрестности точки s задается уравнениями

$$p_I = \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, \quad x^{\overline{I}} = -\frac{\partial S_I}{\partial p_{\overline{I}}}. \tag{5}$$

Очевидно, матрица

$$\left\| \frac{\partial x^{\overline{I}}(x^I, p_{\overline{I}})}{\partial p_{\overline{I}}} \right\| = \left\| -\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\overline{I}} \partial p_{\overline{I}}} \right\|$$

— симметрическая.

Пусть $s \in X$, где X — цикл особенностей проекции $L \to \mathbf{R}^n_x$. Тогда в точке s матрица

$$\frac{\partial x}{\partial (x^I, p_{\overline{I}})} = \begin{pmatrix} 1_I & \dfrac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial x^I} \\ 0 & \dfrac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

вырождена, и, следовательно, вырождена также и матрица $||\partial x^{\overline{I}}/\partial p_{\overline{I}}||$ (ясно также, что эта матрица невырождена вне X).

Пусть γ — путь на L, пересекающий цикл X в точке s; s' и s'' — точки γ, близкие к точке s и лежащие на γ до и после s, соответственно.

Индекс Маслова $i(\gamma, s)$ определяется формулой

$$i(\gamma, s) = \mathrm{ind}_- \left.\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\overline{I}} \partial p_{\overline{I}}}\right|_{s''} - \mathrm{ind} \left.\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\overline{I}} \partial p_{\overline{I}}}\right|_{s'}, \tag{7}$$

где $\mathrm{ind}_-(A)$ — отрицательный индекс инерции квадратичной формы (Au, u) (число отрицательных собственных значений симметрической матрицы A).

3. Основная теорема. Сформулируем и докажем теперь основную теорему этой лекции.

Теорема 1.1 *Имеет место равенство*

$$k(t^*) = i(t^*).$$

Доказательство. Проведем ряд редукций.

1) В определении (1) числа $k(t^*)$ можно заменить координаты ξ на $(x^I, p_{\overline{I}})$ (поскольку сдвиг вдоль векторного поля

$$\frac{\partial}{\partial t} + V(H)$$

является диффеоморфизмом). Таким образом,

$$\begin{aligned} k(t^*) &= \dim \mathrm{Ker} \left.\left|\left|\frac{\partial x}{\partial \xi}\right|\right|\right|_{s^*} = \dim \mathrm{Ker} \left.\left|\left|\frac{\partial x}{\partial (x^I, p_{\overline{I}})}\right|\right|\right|_{s^*} \\ &= \dim \mathrm{Ker} \left.\begin{pmatrix} 1_I & \dfrac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial x^I} \\ 0 & \dfrac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}} \end{pmatrix}\right|_{s^*} = \dim \mathrm{Ker} \left.\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}}\right|_{s^*}. \end{aligned} \tag{8}$$

2) Совершим теперь в $\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$ три канонические[1] преобразования, индуцированные диффеоморфизмами базы $\mathbf{R}^n_x$.

Отметим, что при таких преобразованиях

– не меняется X;

– не меняется $k(t^*)$;

[1]Преобразование

$$g: \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np} \to \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$$

называется *коническим*, если они сохраняют форму $dx \wedge dp$.

– не меняется $i(t^*)$.

Итак,

2а) Положим

$$\tilde{x}^I = x^I, \quad \tilde{x}^{\overline{I}} = x^{\overline{I}} + \frac{\partial p_I}{\partial p_{\overline{I}}}(s^*)x^I; \tag{9}$$

$$\tilde{p}_I = p_I - \frac{\partial p_I}{\partial p_{\overline{I}}}(s^*)p_{\overline{I}}, \quad \tilde{p}_{\overline{I}} = p_{\overline{I}}. \tag{10}$$

В новых переменных

$$\frac{\partial\, \tilde{p}_I}{\partial\, \tilde{p}_{\overline{I}}}(s^*) = 0, \tag{11}$$

(проверьте!)

2б) Опустим волну над новыми переменными $(\tilde{x}, \tilde{p})$ и совершим преобразование вида

$$\begin{cases} \tilde{x}^{\overline{I}} = {}^tQx^{\overline{I}} & \tilde{x}^I = x^I, \\ \tilde{p}_{\overline{I}} = Qp_{\overline{I}} & \tilde{p}_I = p_I, \end{cases} \tag{12}$$

где Q — постоянная ортогональная матрица. Тогда

$$\frac{\partial\, \tilde{x}^{\overline{I}}}{\partial\, \tilde{p}_{\overline{I}}} = -\frac{\partial^2 S_I}{\partial\, \tilde{p}_{\overline{I}}\, \partial\, \tilde{p}_{\overline{I}}} = {}^tQ \left\| -\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\overline{I}} \partial p_{\overline{I}}} Q \right\| = {}^tQ \left\| \frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}} \right\| Q. \tag{13}$$

Матрицу Q выберем так, чтобы матрица (13) была ортогональна в точке s^*. Тогда в новых координатах (волну снова опускаем)

$$\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\, k(t^*) \\ \}\, |\overline{I}| - k(t^*) \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k(t^*)} & \underbrace{\quad}_{|\overline{I}|-k(t^*)} \end{array} & \end{array}, \tag{14}$$

причем на траектории l все элементы матриц A, B, C, D кроме диагональных элементов матрицы D, суть $O(t-t^*)$, диагональные же элементы матрицы D отличны от 0 при $t = t^*$.

2в) Очевидно, матрица

$$\tilde{A} = \lim_{t \to t^*} (t-t^*)^{-1} A$$

— симметрическая матрица. Совершим еще одно преобразование вида (12), такое, что Q затрагивает лишь переменные, входящие в A и приводят матрицу $\tilde{A}$ к диагональному виду. В результате последовательного выполнения преобразований 2 а) – 2 в) мы приходим к каноническим координатам (x, p), для которых

$$\frac{\partial p_I}{\partial p_{\overline{I}}}(s^*) = 0 \tag{15}$$

и

$$\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}}(t) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} O(t-t^*) & & O(t-t^*)^2 & & & \\ & \ddots & & & O(t-t^*) & \\ O(t-t^*)^2 & & O(t-t^*) & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & a_1 & & O(t-t^*) \\ & O(t-t^*) & & & \ddots & \\ & & & O(t-t^*) & & a_{|\overline{I}|-k(t^*)} \end{array}\right) =$$

(первые три строки: $k(t^*)$; первые три столбца: $k(t^*)$)

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{16}$$

3) Вычислим производные вдоль траектории l от диагональных элементов матрицы A. Это удобно сделать в координатах $(x^I, p_{\overline{I}}, t)$, где $(x^I, p_{\overline{I}})$ — координаты на $L \cap \{t = t^*\}$, а t — параметр вдоль траектории. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}}\right)\Bigg|_{t^*} &= \frac{\partial}{\partial p_{\overline{I}}}\left(\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial p_{\overline{I}}}\frac{\partial H}{\partial p_{\overline{I}}}(x(x^I, p_{\overline{I}}, t), p(x^I, p_{\overline{I}}, t))\Bigg|_{t^*} \\ &= \left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_{\overline{I}}\partial p_{\overline{I}}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\overline{I}}\partial p_I}\frac{\partial p_I}{\partial p_{\overline{I}}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\overline{I}}\partial x^{\overline{I}}}\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}}\right\}\Bigg|_{t^*}. \end{aligned} \tag{17}$$

В силу (15), (16) производные вдоль l от диагональных элементов матрицы A будут равны $\partial^2 H/\partial p_i \partial p_i$ с соответствующими значениями индекса i и, следовательно, положительны согласно критерию Сильвестра (напомним, что матрица $||\partial^2 H/\partial p_i\, \partial p_i||$ предполагается положительно определенной).

Исследуем теперь матрицу

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p_{\overline{I}}\partial p_{\overline{I}}} = -\frac{\partial x^{\overline{I}}}{\partial p_{\overline{I}}}.$$

Преобразованием подобия

$$\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A & -B \\ -C & -D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}\,{}^t\!B & E \end{pmatrix}$$

она приводится к виду

$$\begin{pmatrix} -A + BD^{-1}\,{}^tB & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Но

$$-A + BD^{-1}\,{}^tB = -A + O(t - t^*)^2.$$

Поэтому производные (по t) диагональных элементов матрицы $A^{-1} + BD^{-1}\,{}^tB$ в точке s^* отрицательна и, следовательно, при переходе t через критическое значение t^* ровно $k(t^*)$ собственных значений матрицы $\partial^2 S/\partial p_{\overline{I}}\partial p_{\overline{I}}$ меняют знак с положительного на отрицательный. Таким образом,

$$i(t^*) = \operatorname{ind}_- \left.\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\overline{I}}\partial p_{\overline{I}}}\right|_{S''} - \operatorname{ind}_- \left.\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\overline{I}}\partial p_{\overline{I}}}\right|_{S'} = k(t^*). \tag{19}$$

Теорема доказана.