1 Некоторые примеры

Задача с фиксированными концами. Задача со свободным правым концом. Задача со свободными концами. Изопериметрическая задача.

Мы рассматриваем функционал

$$I[x(t)] = \int\limits_0^{t_1} L(t, x, \dot{x})\, dt. \tag{1}$$

Применим построения предыдущей лекции к некоторым задачам о минимуме функционала (1).

1. Задача с фиксированными концами. В этой задаче фиксированы значения

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

а) *Построение многообразия* $\mathcal{L}_0$. Рассмотрим конормальное расслоение $N^*(x_0) \subset \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_{np}$ в точке $x_0 \in \mathbf{R}^n_x$. Оно имеет вид

$$N^*(x_0) = \{(x, p) \,|\, p \text{ произвольное}, \ x = x_0\}.$$

Вложим пространство $N^*(x_0)$ в $\mathbf{R}^{n+1}_{x,t} \times \mathbf{R}_{n+1p,E}$ в соответствии с уравнениями $t = 0$, $E = -H(t, x, p)$. Тогда получаем *лагранжево* многообразие

$$\mathcal{L}_0 = \{(x, p, t, E) \,|\, t = 0, x = x_0, E = -H(t, x, p)\}.$$

Действительно, мы имеем

а) $(dE \wedge dt + dp \wedge dx)|_{\mathcal{L}_0} = 0$, поскольку $dt = 0$, $dx = 0$ на $\mathcal{L}_0$;

б) $(E + H(t, p, x)|_{\mathcal{L}_0} = 0$ (что очевидно по построению);

в) $\mathcal{L}_0$ трансверсально полю

$$\frac{\partial}{\partial t} + V(H), \tag{2}$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V(H)\right) \rfloor dt = 1, \quad dt|_{\mathcal{L}_0} = 0.$$

Более того, $\{\mathcal{L}_0\}$ является геодезическим уровнем, поскольку

$$(E\, dx + p\, dx)|_{\mathcal{L}_0} = 0.$$

б) *Построение многообразия* $\mathcal{L}$. Многообразие $\mathcal{L}$ является фазовым потоком многообразия $\mathcal{L}_0$ вдоль поля (2). Многообразие $\mathcal{L}$ задается соотношениями

$$\mathcal{L} = \{(x, p, t, E) \,|\, x = x(t, p_0),\ p = p(t, p_0),\ E = -H(t, x, p)\},$$

где $x(t,p_0)$, $p(t,p_0)$ — решения системы Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{x}= \dfrac{\partial H}{\partial p}(t,x,p), \\ \dot{p}= -\dfrac{\partial H}{\partial x}(t,x,p) \end{cases} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$x(0)=x_0, \quad p(0)=p_0. \tag{4}$$

При этом x_0 фиксировано на $\mathcal{L}_0$, p_0 — переменная величина на $\mathcal{L}_0$.

в) *Область однозначности проекции.* Существует такое число $\varepsilon > 0$, что при $0 < t < \varepsilon$ проекция $\mathcal{L} \to \mathbf{R}^{n+1}_{x,t}$ однозначна.

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_0}\right)\bigg|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial p_0}(\dot{x}_0)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x}\frac{\partial x}{\partial p_0} + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p}\frac{\partial p}{\partial p_0}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p}(0,x_0,p_0), \\ \frac{\partial x}{\partial p_0}\bigg|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial x}{\partial p_0} = t\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial p}(0,x_0,p_0) + O(t^2),$$

и эта матрица невырождена при $0 < t < \varepsilon$.

Итак, при этих значениях t *любая кривая геодезического наклона реализует минимум в классе задач с фиксированными концами; любая точка в достаточно малой окрестности точки* $(0,x_0)$ *лежит ровно на одной кривой геодезического наклона.*

2. Задача со свободным правым концом Пусть $X \subset \mathbf{R}^n_x$ — подмногообразие. Рассмотрим задачу о минимизации функционала (1) при условиях $x(0)=x_0$, $x(t_1) \in X$. Многообразие $\mathcal{L}$ построим так же, как и для задачи с фиксированными концами.

Предложение 1.1 *Пусть все рассматриваемые кривые лежат в области однозначности проекции* $\mathcal{L} \to \mathbf{R}^{n+1}_{x,1}$ *и пусть* t_1 *достаточно мало. Пусть* x_1 *— точка минимума* $S|_X$. *Тогда экстремаль* $\overline{x}(t)$*, соединяющая точку* x_0 *с точкой* x_1*, реализует* $\min I[x(t)]$ *в классе кривых* $x=x(t)$*, удовлетворяющих условиям* $x(0)=x_0$*,* $x(t_1) \in X$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную кривую $x=x(t)$ такую, что $x(0)=x_0$, $x(t_1)=x_2 \in X$ (см. рис. 1.1). Пусть также $\overline{\overline{x}}(t)$ — экстремаль, соединяющая точку x_0 с точкой x_2 (она существует в силу однократности покрытия). Мы имеем

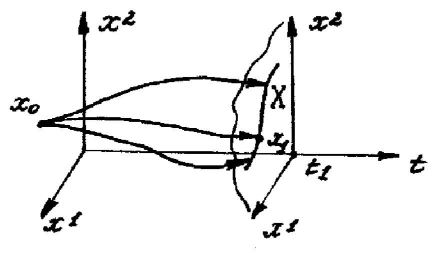

Рис. 10.1.

$$I[\overline{\overline{x}}(t)] \le I[x(t)]$$

в силу пункта 9.1 и

$$I[\overline{x}(t)] = S(x_1) \le S(x_2) = I[\overline{\overline{x}}(t)],$$

поскольку x_1 — точка минимума ограничения $S|_X$.

Определение точки x_1 может быть интерпретировано как *условие трансверсальности*. Действительно, если x_1 — точка минимума функции $S|_X$, то для любого вектора $\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$, касательного к X, мы имеем

$$\xi^i \frac{\partial S}{\partial x^i} = 0$$

или, в силу формул, доказанных на предыдущей лекции,

$$\xi^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x, \xi(x,t)) = 0$$

для любого вектора ξ, касательного к X. Это и есть *условие трансверсальности*. Оно может также быть проинтерпретировано геометрически. Именно, поскольку $p = L_{\dot{x}}$, то над точкой x_1 будет иметь

$$p(x,t)\, dx|_{TX} = 0,$$

то есть

$$p\, dx \in N^*(X).$$

Итак, x_1 отвечает точке пересечения лагранжева многообразия $\mathcal{L}$ с $N^*(X)$.

3. Задача со свободными концами

Пусть X_0, X_1 — подмногообразия в $\mathbf{R}^n_x$. Рассмотрим задачу минимизации функционала при условиях

$$x(0) \in X_0, \quad x(t_1) \in X_1,$$

(см. рис. 1.2).

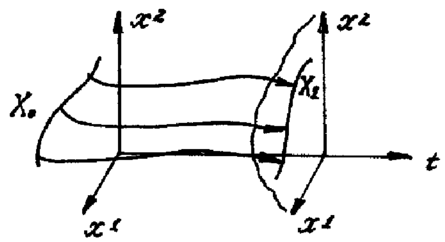

Рис. 10.2.

а) *Построение* $\mathcal{L}_0$. Для построения многообразия $\mathcal{L}_0$ рассмотрим конормальное расслоение

$$N^*(X_0) = \{(x,p)\,|\, x \in X_0,\ p\,dx|_{TX_0} = 0\}$$

и вложим его в $\mathbf{R}^{n+1}_{x,t} \times \mathbf{R}_{n+1 p,E}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_0 = \{(x,p,t,E)\,|\, t = 0,\ (x,p) = N^*(X_0),\ E = -H(t,x,p)\}.$$

Имеем:

i) $\{dE \wedge dx + dp \wedge dx\}|_{\mathcal{L}_0} = 0$, поскольку

$$dt|_{\mathcal{L}_0} = 0, \quad p\,dx|_{\mathcal{L}_0} = 0.$$

Более того, X_0 является *геодезическим уровнем*:

$$\{E\,dt + p\,dt\}|_{\mathcal{L}_0} = 0.$$

ii) по построению

$$\{E + H(t,p,x)\}|_{\mathcal{L}_0} = 0.$$

iii) как и в случае п.1 доказывается, что $\mathcal{L}_0$ трансверсально векторному полю

$$\frac{\partial}{\partial t} + V(H). \tag{5}$$

б) *Построение многообразия* $\mathcal{L}$. Многообразие $\mathcal{L}$ строится как фазовый поток многообразия $\mathcal{L}_0$ вдоль векторного поля (5), то есть уравнения $\mathcal{L}$ суть

$$x = x(t, x_0, p_0), \quad p = p(t, x_0, p_0), \quad E = -H(t, x_0, p),$$

где $(x(t,x_0,p_0), p(t,x_0,p_0))$ — решения системы Гамильтона (3) с начальными условиями (4), где $(x_0, p_0) = N^*(X_0)$.

в) *Область однозначности проекции*. Покажем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ проекция $\mathcal{L} \to \mathbf{R}^{n+1}_{x,t}$ является невырожденной при $0 < t < \varepsilon$. Для этого выберем специальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$ (и двойственные координаты $(p_1, \ldots, p_n)$) таким образом, чтобы многообразие X_0 задавалось уравнениями

$$X_0 = \{x^1 = \ldots = x^k = 0\}.$$

Обозначим

$$x = (x', x''), \quad x' = (x^1, \ldots, x^k), \quad x'' = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$$

и, аналогично, $p = (p', p'')$. Начальные данные для системы Гамильтона имеют вид

$$x(0) = (0, x_0''), \quad p(0) = (p_0', 0),$$

так что ее решение запишется как

$$\begin{cases} x = x(t, p_0', x_0''), \\ p = p(t, p_0', x_0''). \end{cases}$$

Мы имеем

$$\left.\frac{\partial x}{\partial(p_0', x_0'')}\right|_{t=0} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{k} & \underbrace{\quad}_{n-k} \end{array} & \end{array} .$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial(p_0', x_0'')}\right)\right|_{t=0} &= \left.\frac{\partial x}{\partial(p_0', x_0'')}\frac{\partial H}{\partial p}(t,x,p)\right|_{t=0} \\
&= \left.\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial p_0'} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial p_0'} & * \\ \hline * & * \end{array}\right)\right|_{t=0} \\
&= \left.\left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'\partial p'} & * \\ \hline * & * \end{array}\right)\right|_{t=0}
\end{aligned}$$

(звездочками мы обозначили подматрицы, значения элементов которых для нас несущественны). Отсюда

$$\frac{\partial x}{\partial(p_0', x_0'')} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p'\partial p'}t + O(t^2) & O(t) \\ \hline O(t) & 1 + O(t) \end{array}\right) \tag{6}$$

Очевидно при $0 < t < \varepsilon$ матрица (6) невырождена (напомним, что матрица $\partial^2 H/\partial p'\partial p'$ невырождена в силу критерия Сильвестра).

г) *Условие трансверсальности на правом конце.* Предположим, что t_1 достаточно мало, и исследуемые кривые лежат в области однозначности проекции. Тогда, как и в п. 9.2, можно получить условие трансверсальности. Именно, пусть x_1 — точка минимума действия S на X_1. Как и выше, эта точка отвечает точке пересечения $\mathcal{L}$ с $N^*(X_1)$. Тогда *экстремаль $X(t)$, идущая из X_0 в точку x_1, реализует минимум $I[x(t)]$ в классе кривых, удовлетворяющих условиям $x(0) \in X_0$, $x(t_1) \in X_1$.*

Доказательство почти такое же, как и раньше. Пусть $x(t)$ — произвольная кривая, такая, что $x(0) \in X_0$, $x(t_1) = x_2 \in X_1$. Тогда существует в силу однократности покрытия экстремаль $\overline{\overline{x}}(t)$, соединяющая X_0 с точкой x_2, удовлетворяющая неравенству

$$I[\overline{\overline{x}}\,(t)] \le I[x(t)]$$

(что вытекает из обобщения основного алгоритма, изложенного на предыдущей лекции, в котором нужно положить $X_1 = X_0$, $X_2 = \{x_2\}$).

Далее
$$I[\overline{x}(t)] \le I[\overline{\overline{x}}\,(t)]$$
поскольку x_1 — точка минимума S.

Упражнение 1.2 Провести исследование задач 1–3 в параметрическом случае.

4. Изопериметрическая задача

Рассмотрим задачу о минимизации функционала
$$I[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x})\, dt$$
при условиях
$$\begin{aligned} J[x(t)] &= \int\limits_{t_1}^{t_2} K(t, x, \dot{x})\, dt = J_0 = \mathrm{const}, \\ x(t_1) &= x_0, \quad x(t_2) = x_2. \end{aligned}$$

а) *Основной алгоритм.* Пусть кривая $\overline{x}(t)$ задана на достаточно малом отрезке $[t_1, t_2]$. Пусть также λ — такое число, что:

1) $\overline{x}(t)$ — экстремаль функционала
$$I[x(t)] + \lambda J[x(t)];$$

2) $\overline{x}(t_1) = x_1$, $\overline{x}(t_2) = x_2$, $J[\overline{x}(t)] = J_0$;

3) матрица
$$\frac{\partial^2 L}{\partial\,\dot{x}\,\partial\,\dot{x}} + \lambda\frac{\partial^2 K}{\partial\,\dot{x}\,\partial\,\dot{x}}$$
положительно определена.

Тогда $\overline{x}(t)$ реализует минимум $I[x(t)]$ в классе кривых, для которых
$$x(t_1) = x_1 \quad x(t_2) = x_2 \quad J[x(t)] = J_0. \tag{7}$$

Действительно, из условий 1) – 3) и п. 9.1вытекает, что функционал
$$I[x(t)] + \lambda\{J[x(t)] - J_0\}$$
имеет минимум на кривой $\overline{x}(t)$ в классе кривых, для которых $x(t_1) = x_0$, $x(t_2) = x_2$.

Далее, пусть $x(t)$ — какая-либо кривая, удовлетворяющая условиям (7). Тогда
$$I[x(t)] + \lambda\{J[x(t)] - J_0\} \ge I(\overline{x}(t)) + \lambda\{J[\overline{x}(t)] - J_0\},$$
$$I[x(t)] + \lambda\{J[x(t)] - J_0\} = I[x(t)],$$
$$I[\overline{x}(t)] + \lambda\{J[\overline{x}(t)] - J_0\} = I[\overline{x}(t)].$$
что и требовалось.

Пример 1.3 (задача Дидоны) Рассмотрим следующую задачу: максимизировать площадь S под кривой заданной длины l, опирающейся своими концами на ось абсцисс (см. рис. 1.3).

Математическая формулировка здесь такова:

$$I[x(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} x\,dt \to \max$$

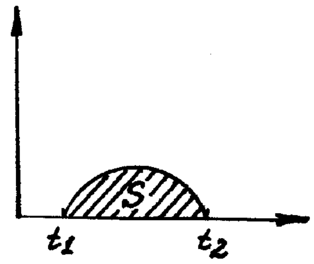

Рис. 10.3.

при условиях

$$\begin{aligned} J[x(t)] &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = l_0 = \mathrm{const}, \\ x(t_1) &= x(t_2) = 0. \end{aligned}$$

Имеем

$$I + \lambda J = \int\limits_{t_1}^{t_2} (x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2})\,dt.$$

Поскольку подынтегральное выражение не зависит от t, для экстремума функционала $I + \lambda J$ имеется закон сохранения (первый интеграл)

$$x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2} - \dot{x}\,\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2}) = x + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C_1. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) получаем:

$$(x - C_1)^2 - (t - C_2)^2 = \lambda^2,$$

то есть искомая кривая — дуга окружности.

Из (8) при $t = t_1$ получаем, что знак λ совпадает со знаком C_1 – x-координаты центра окружности. Если $C_1 < 0$, то $\lambda < 0$. Далее, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^2}(x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2}) = \frac{\lambda}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}}. \tag{9}$$

При $\lambda < 0$ можно, таким образом, утверждать, что найден максимум.