1 О некоторых вариационных принципах в физике

Вариационные принципы механики (принцип наименьшего действия Гамильтона; принцип Мопертюи). Вариационный принцип геометрической оптики (принцип Ферма), геометрооптическое приближение. Оптико-механическая аналогия.

Идеи вариационного исчисления находят широкое применение в теоретической физике (см., например, [ЛаЛи]). Возможность такого применения обеспечивается следующим "экспериментальным" фактом: многие фундаментальные физические закономерности допускают вариационную формулировку в виде так называемых "вариационных принципов". В данной лекции мы рассмотрим ряд примеров.

1. Вариационные принципы механики

А. Принцип наименьшего действия Гамильтона

а) Рассмотрим *систему n частиц* (материальных точек) в потенциальном поле. Пусть $\vec{r}_i$ — радиус-вектор, а $\vec{V}_i$ — скорость i-ой частицы, $i = 1, \ldots, n$. Тогда кинетическая энергия T системы равна

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}, \tag{1}$$

а потенциальная энергия U задается некоторой функцией от радиус-векторов,

$$U = U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n). \tag{2}$$

Конфигурация системы может быть задана $3n$ координатами

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3});$$

т.о. движение системы изображается траекторией в $3n$-мерном пространстве $\mathbf{R}^{3n}$.

Принцип наименьшего действия заключается в следующем:

Движение системы материальных точек происходит таким образом, что функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt \tag{3}$$

("действие") принимает минимальное значение.

Составим уравнения Эйлера для лагранжиана

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x) \tag{4}$$

функционала (3)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ij}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{ij}} = m_i v_{ij}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{ij}} = F_{ij}. \tag{6}$$

Отсюда получаем уравнения Эйлера в виде

$$m_i \dot{v}_{ij} = F_{ij}, \tag{7}$$

которые, как мы видим, совпадают с хорошо известными уравнениями Ньютона.

Преимуществом вариационной формулировки законов движения является ее инвариантность (независимость от замен координат), а также то, что она остается справедливой для систем с идеальными голономными связями. Поэтому с помощью принципа Гамильтона легко выписать уравнения движения и голономной системы, конфигурация которой задается набором "обобщенных координат" — функций от обычных координат, однозначно определяющих положение системы.

б) **Пример 11.1.** Рассмотрим математический маятник (см. рис. 1.1) — материальную точку массы m в поле силы тяжести, закрепленную на жестком невесомом стержне длины l, который может свободно вращаться в плоскости Oxy. В качестве обобщенной координаты естественно выбрать угол φ отклонения маятника от вертикали — положения равновесия. Тогда

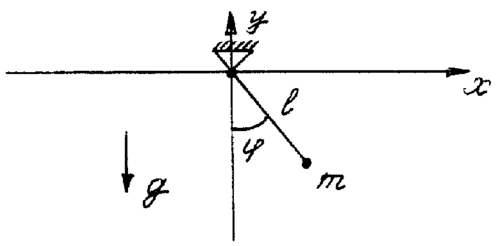

Рис. 11.1.

$$\begin{cases} x = l\sin\varphi, \\ y = -l\cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = l\,\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ \dot{y} = l\,\dot{\varphi}\sin\varphi, \end{cases} \tag{8}$$

так что лагранжиан имеет вид

$$L = T - U = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi \tag{9}$$

и принцип Гамильтона записывается следующим образом

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\right] dt \to \min. \tag{10}$$

Отсюда получаем уравнения движения — уравнения Эйлера для функционала (10):

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \tag{11}$$

в) Разберем теперь *общий случай.* Пусть $q_1, \ldots, q_k$ — обобщенные координаты, описывающие положение системы,

$$L(t, q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q, t)$$

— функция Лагранжа. Мы имеем очевидное выражение кинетической энергии через обобщенные координаты и скорости,

$$T = \sum \frac{m_i \overrightarrow{v}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j \; . \tag{12}$$

Ясно, что $T \geq 0$. Кроме того, если $T = 0$, то и все $\overrightarrow{v}_i = 0$ и, следовательно, $\dot{q} = 0$ (напомним, что $q = q(x)$, так что $\dot{q} = \partial q / \partial x \, \dot{x}$). Отсюда следует, что выполнено *условие Лежандра*: матрица

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_j} = a_{ij}(q) \tag{13}$$

положительно определена и, следовательно, существует функция Гамильтона $H(t, q, p)$ — преобразование Лежандра функции $L(t, q, \dot{q})$. Гамильтоновы координаты

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

называется *обобщенными импульсами*, поскольку в том случае, когда $q_i = x_i$ — декартовы координаты, величина

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \, \dot{x}_i \tag{14}$$

представляет собой обычный импульс. В рассмотренном выше примере, когда $q = \varphi$, мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \, \dot{\varphi} = mlv, \tag{15}$$

то есть обобщенный импульс совпадает с *моментом импульса*. Вычислим функцию Гамильтона голономной системы материальных точек явно

$$H(t, q, p) = \left\{ \dot{q}_i \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right\} \Bigg|_{\dot{q} = \dot{q}(p,q)} = q_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = -T + U = 2T - T + U = T + U, \tag{16}$$

поскольку кинетическая энергия T однородна второй степени по обобщенным скоростям. Итак,

Функция Гамильтона, $H(t, q, p)$ голономной системы материальных точек есть ее полная энергия (сумма кинетической и потенциальной энергии) выраженная через обобщенные координаты и импульсы.

Теперь уравнения движения могут быть записаны в форме системы Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(t, q, p). \tag{17}$$

г) Важным является понятие *циклической координаты*: переменная t (или q_i) называется *циклической*, если функция Гамильтона H не зависит явно от t (соответственно, от q_i). Если механическая система обладает циклической координатой, то в ней выполняется соответствующий *закон сохранения* (то есть имеется нетривиальная функция от координат и импульсов, значение которой постоянно во времени). Действительно, обозначим через d/dt производную по времени в силу системы (17).

i) Пусть t — циклическая координата. Тогда

$$\frac{d}{dt}\{H(q,p)\} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \tag{18}$$

то есть сохраняется полная энергия системы (закон сохранения энергии).

ii) Пусть q_i — циклическая координата (для определенности будем считать, что $i = 1$), тогда

$$\frac{d}{dt}p_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0, \tag{19}$$

то есть сохраняется обобщенный импульс p_1 (это в различных ситуациях дает законы сохранения импульса, момента импульса и т.д.). Величина

$$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

называется *обобщенной силой*.

При наличии циклической координаты размерность системы (17) может быть понижена на две единицы. Действительно, в силу (17)

$$p_1 \equiv p_{10} = \mathrm{const}$$

вдоль траектории; далее, достаточно решить систему ($q' = (q_2, \ldots, q_k)$, $p' = (p_2, \ldots, p_k)$)

$$\dot{q}' = \frac{\partial H}{\partial p'}(t, q', p_{10}, p'), \quad \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'}(t, q', p_{10}, p') \tag{20}$$

размерности $2k - 2$, а затем найти

$$q_1 = q_{10} + \int_0^t \frac{\partial H}{\partial p_1}(t, q', p_{10}, p')\, dt \tag{21}$$

(интеграл в (21) берется вдоль траектории системы (21)).

B. Принцип Мопертюи

Траектория l материальной точки в потенциальном поле $U(x)$ может быть найдена из принципа Мопертюи (который, однако, является вариационным принципом именно для *траектории*, а не для закона движения). Этот принцип формулируется так:

$$\int_l \sqrt{E - U(x)}\, dl \to \min \tag{22}$$

или, через параметрический лагранжиан,

$$\int\limits_l \sqrt{E-U(x)}\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}\,d\tau \to \min . \tag{23}$$

Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=\frac{\dot{x}_i\sqrt{E-U(x)}}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}}, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}=-\frac{1}{2\sqrt{E-U(x)}}\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{24}$$

уравнения Эйлера для функционала (23) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{x}_i\sqrt{E-U(x)}}{\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}}\right\}=-\frac{1}{2\sqrt{E-U(x)}}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3. \tag{25}$$

Поскольку экстремали в параметрическом случае не зависят от выбора параметризации, выберем в качестве параметра длину дуги; тогда уравнения (25) приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\sqrt{E-U(x)}\frac{dx_i}{dl}\right\}=-\frac{1}{2\sqrt{E-U(x)}}\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{26}$$

Далее, величина $E-U(x)$ имеет физический смысл кинетической энергии:

$$E-U(x)=\frac{mv^2}{2} \tag{27}$$

Поэтому можно ожидать, что замена параметра l

$$\frac{dl}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}, \tag{28}$$

упростит уравнения (26). И, в самом деле, из (28) получаем

$$\sqrt{E-U(x)}\frac{d}{dl}=\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{d}{dt}, \tag{29}$$

откуда

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial x_i}=F_i, \tag{30}$$

то есть мы пришли к уравнениям Ньютона.

2. Вариационный принцип геометрической оптики

А. Принцип Ферма

Рассмотрим задачу о распространении света в среде. Предположим, что $v = v(x)$ — скорость распространения света в точке x. Отношение

$$n = c/v,$$

где c — скорость света в пустоте, называется, как известно, *показателем преломления*. Принцип Ферма утверждает: свет распространяется вдоль лучей доставляющих минимум оптической длины пути

$$\int_l n\, dl = \int_l n\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\, d\tau \to \min. \tag{31}$$

Дадим обоснование принципа Ферма с помощью так называемого геометро-оптического приближения.

Геометро-оптическое приближение

Процесс распространения световых волн можно описывать с помощью волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \Delta u(x,t), \quad v^2 = v^2(x), \tag{32}$$

(строго говоря, следовало бы рассматривать уравнения Максвелла, но, в целях простоты изложения, ограничимся скалярным уравнением). Будем изучать распространение волны заданной частоты ω, то есть, предположим, что

$$u(x,t) = \overline{u} e^{i\omega t}, \tag{33}$$

$\omega = \text{const}$. Тогда для $\overline{u}$ получим уравнение

$$\Delta \overline{u}(x) + \frac{\omega^2}{v^2}\overline{u}(x) = 0, \tag{34}$$

или

$$\Delta \overline{u}(x) + k_0^2 n^2(x) \overline{u}(x) = 0, \tag{35}$$

где $k_0 = \omega/c$ называется *волновым числом*, $n(x) = c/v$ — *показатель преломления*.

Пусть частота ω такова, что волновое число k_0 можно считать большим параметром.

Геометро-оптическим приближением для решения $\overline{u}(x)$ уравнения (35) называется представление его в виде

$$\overline{u}(x) = e^{ik_0 S(x)} \left[u_0(x) + \frac{1}{ik_0} u_1(x) + \ldots \right], \tag{36}$$

где $S(x)$ — вещественная функция, называемая *эйконалом*, в квадратных скобках стоит асимптотическое разложение по степеням k_0^{-1}. Подставим функцию (36) в уравнение (35), ограничиваясь первым членом разложения $u_0(x)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \nabla \overline{u} &= e^{ik_0 S}\nabla u_0 + ik_0 e^{ik_0 S}\nabla S u_0, \\ \Delta \overline{u} &= e^{ik_0 S}\Delta u_0 + 2ik_0 e^{ik_0 S}(\nabla S, \nabla u_0) + ik_0 e^{ik_0 S}\Delta S u_0 - k_0^2(\nabla S)^2 u_0 e^{ik_0 S}, \end{aligned} \tag{37}$$

мы приходим к уравнению

$$k_0^2(n^2 - (\nabla S)^2)u_0 + ik_0[2(\nabla S, \nabla u_0) + \Delta S u_0] + \Delta u_0 = 0. \tag{38}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при k_0^2 и k_0, получаем *уравнение эйконала*

$$n^2 - (\nabla S)^2 = 0 \tag{39}$$

и *уравнение переноса*

$$2(\nabla S, \nabla u_0) + \Delta S \cdot u_0 = 0. \tag{40}$$

Решение уравнений (39) – (40) дает геометро-оптическое приближение вида $u_0(x)e^{ik_0 S(x)}$. Например, можно рассмотреть плоскую волну s

$$u = u_0 e^{ik(\vec{s}, \vec{r})}, \quad \text{где} \quad k = k_0 \cdot n, \tag{41}$$

распространяющуюся в направлении, задаваемом вектором $\vec{s}$, $|\ \vec{s}\ | = 1$. Таким образом, очевидно, что направление распространения луча в геометро-оптическом приближении дается вектором

$$\vec{s} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}. \tag{42}$$

Используя вектор (42), можно уравнение эйконала записать в другой форме:

$$n\ \vec{s} = \nabla S. \tag{43}$$

Из (43) вытекает, что величина

$$\int_A^B (n\ \vec{s}, d\ \vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} S(B) - S(A) \tag{44}$$

не зависит от выбора кривой интегрирования, соединяющей точки A и B (эта величина называется *интегральным инвариантом Лагранжа*).

Теперь мы можем доказать принцип Ферма. Очевидно,

$$dl = |d\vec{r}\ | \geq (\vec{s}, d\vec{r}), \tag{45}$$

причем равенство достигается только в том случае, если $d\vec{r}$ пропорционально $\vec{s}$. Поэтому

$$\int\limits_A^B n\,dl \geq \int\limits_A^B \int\limits_A^B n(\vec{s}, d\vec{r}) = S(B) - S(A). \tag{46}$$

Однако, "в большом" принцип Ферма перестает быть верным. Причина "неминимальности" в большом заключается в том, что функция S, вообще говоря, многозначна (вспомним, что определена она на самом деле не на физическом пространстве, а на лагранжевом многообразии).
Типичная картина лучей показана на рис. 1.2.

Рис. 11.2.

Замечание 11.2. После каустики волновое поле в геометро-оптическом приближении имеет вид

$$\overline{u} = e^{i\frac{\pi}{4}m(t_0)} e^{ikS} u_0, \tag{47}$$

где $m(t_0)$ — индекс Маслова.

B. Оптико-механическая аналогия

Сравнивая рассмотренные нами вариационные принципы, можно сделать вывод о существовании некой аналогии между механикой и оптикой. Такая аналогия действительно существует. Выпишем соответствующие друг другу понятия в виде таблицы:

Механика	Оптика
Материальная точка	Волновой пакет
Траектория	Луч
Скорость (V)	Групповая скорость (V)
—	Фазовая скорость (v)
Энергия	Частота

Весьма плодотворной оказалась в физике идея, что эта аналогия есть не поверхностное сходство, а проявления так называемого корпускулярно-волнового дуализма, то есть того факта, что частицам материи присущи одновременно и волновые свойства. Приведем некоторые эвристические рассуждения, поясняющие, о чем идет речь.

Будем исходить из того предположения, что функционалы Мопертюи и Ферма соответствуют друг другу,

$$\int_l \sqrt{E-U}\,dt \leftrightarrow \int_l n\,dl = C\int_l \frac{dl}{v}. \tag{48}$$

При этом $v = v(\nu, x)$ (скорость распространения волны зависит как от точки x, так и от частоты ν). Для того, чтобы оба функционала (при соответствующем значении энергии) определяли одни и те же экстремали, потребуем, чтобы их лагранжианы были пропорциональны:

$$\frac{1}{v(\nu, x)} = f(\nu)\sqrt{E(\nu) - U(x)}, \tag{49}$$

где $f(\nu)$, $E(\nu)$ — неизвестные пока что функции частоты.

Далее, введем понятие *групповой скорости* как скорости движения максимума модуля “волнового пакета”

$$u(x,t) = \int e^{2\pi i\nu(t - x/v(\nu))} a(\nu)\,d\nu. \tag{50}$$

Для нахождения точки максимума можно применять метод стационарной фазы. Уравнение стационарной точки имеет вид

$$\frac{d}{d\nu}\left\{\nu\left(t - \frac{x}{v(\nu)}\right)\right\} = 0, \tag{51}$$

откуда

$$t = x\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{v(\nu)}\right), \quad V = \frac{x}{t} = \frac{1}{\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{v(\nu)}\right)}. \tag{52}$$

Итак, групповая скорость V в оптике определяется соотношением

$$\frac{1}{V} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{v(x,\nu)}\right). \tag{53}$$

С другой стороны, в механике

$$\frac{1}{V} = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-U}}; \tag{54}$$

приравнивая друг другу эти два выражения, получаем с учетом (49) для любой функции $U(x)$

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-U}}=\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{v(x,\nu)}\right)=\left\{\frac{d}{d\nu}(\nu f(\nu)\sqrt{E(\nu)-U(x)})\right\} \tag{55}$$

или

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E-U}}=\frac{d}{d\nu}(\nu f(\nu))\sqrt{E-U}+\frac{\nu f(\nu)}{2}\frac{1}{\sqrt{E-U}}\frac{dE}{d\nu}. \tag{56}$$

Поскольку $U=U(x)$ меняется независимо от ν, величину $\sqrt{E-U(x)}$ можно рассматривать как независимую переменную. Поэтому из (56) вытекает, что

$$\frac{d}{d\nu}(\nu f(\nu))=0 \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{m}{2}}=\frac{\nu f(\nu)}{2}\frac{dE}{d\nu}. \tag{57}$$

Таким образом, $\nu\, f(\nu)=\text{const}$ и, следовательно,

$$\frac{dE}{d\nu}=\text{const}\stackrel{\text{def}}{=}h, \quad E=E_0+h\nu.$$

Выбирая начало отсчета энергии так, чтобы $E_0=0$, получаем

$$E = h\nu, \tag{58}$$

$$v(\nu,x) = \frac{h\nu}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{h\nu-U}}, \tag{59}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{h\nu-U}. \tag{60}$$

Отсюда длина волны материальной частицы получается равной

$$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{h}{\sqrt{2m}\sqrt{h\nu-U}}=\frac{h}{mV}=\frac{h}{p}, \tag{61}$$

где p — импульс (де-бройлевская длина волны).

Опыты по дифракции материальных частиц дают возможность определить численное значение λ и, следовательно, определить постоянную h (*постоянную Планка*), которая оказывается равной $h\cong 6,63\cdot 10^{-27}$ эрг $\cdot$ сек.