МК НМУ. Алгебра, 1 курс, 1 семестр. 03.12.06

Экзамен

1. V — вещественное линейное пространство, $\mathcal{N} \in \operatorname{End}(V)$ — оператор. Определим оператор $T_{\mathcal{N}}$ на $\operatorname{End}(V)$: $T_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}) = \mathcal{N}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{N}$. Докажите, что если $\mathcal{N}$ нильпотентен, то и $T_{\mathcal{N}}$ нильпотентен.

2. Пусть V — вещественное ортогональное пространство сигнатуры $(n, 1)$. Докажите, что в V найдется базис, целиком состоящий из изотропных векторов.

3. Пусть V — вещественное линейное пространство размерности n. Докажите, что все элементы пространства $\Lambda^{n-1}V$ разложимы.

4. Можно ли в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$ найти 6 единичных векторов, образующих друг с другом тупые углы?

5. Докажите, что для любого оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ в комплексном линейном пространстве V найдется такой оператор $X \in \operatorname{End}(V)$, являющийся многочленом от $\mathcal{A}$, что $X^{2006} = \mathcal{A}$.

6. Найдите максимальную размерность подпространства в $M_2(\mathbb{R})$, состоящего только из вырожденных матриц.