Задачи для домашнего экзамена

1. Для каких n все миноры второго порядка комплексной $2 \times n$ матрицы могут иметь одинаковое ненулевое значение?

2. Пусть C — невырожденный симплекс в аффинном вещественном пространстве A^n, $n > 1$. Выберем внутри C точку O. Всегда ли существует такое аффинное преобразование $\varphi : A^n \longrightarrow A^n$, что $\varphi(O)$ — центр шара, вписанного в симплекс $\varphi(C)$?

3. Пусть σ — перестановка порядка n, действующая в $\mathbb{C}^n$ по формуле

$$(x_1, \dots , x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots , x_{\sigma(n)}).$$

Найти спектр линейного оператора $\sigma : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

4. Существуют ли такие две невырожденные матрицы A и B из $M_n(\mathbb{C})$, что $AB = BA$, но вместе с тем A и B не могут быть представлены в виде многочленов от некоторой третьей матрицы?

5. Пусть $\mathcal{D}_1, \dots , \mathcal{D}_n$ — диски на плоскости. Обозначим через a_{ij} площадь пересечения $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$. Доказать, что матрица $A = (a_{ij})$ неотрицательно определена. Можно ли в условиях задачи заменить диски а) треугольниками, б) параллелограммами?

6. Какова максимальная размерность подалгебры в $M_n(\mathbb{C})$, которая состоит целиком из вырожденных матриц?