7.09.06

Листок №1

Полоса разгона

Подстановки

Подстановкой степени n называется взаимно-однозначное отображение множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Такое отображение φ удобно записывать следующим образом: $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$. Подстановки образуют группу относительно операции композиции отображений. Эта группа называется симметрической группой степени n и обозначается S_n.

Литература: А.И. Кострикин Введение в алгебру , Наука, 1996.

1. Вычислить

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

2. Представить подстановку $(18)(17)(16)(15)(14)(13)(12)$ в виде произведения независимых циклов.

3. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{101}$.

4. Вычислить $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ j_1 & \ldots & j_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_n \\ j_1 & \ldots & j_n \end{pmatrix}^{-1}$.

5. Доказать, что каждая подстановка разложима в произведение транспозиций.

6. Найти число инверсий в подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Многочлены

7. Разложить $x^4 - 10x^2 + 1$ на линейные множители над полем $\mathbb{C}$.

8. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ корни многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Вычислить $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$.

9. При каких m $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

10. Разложить $x^5 - 1$ на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$.

11. Многочлен $p(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $p(x) = x$ не имеет действительных решений. Доказать, что уравнение $p(p(x)) = x$ не имеет действительных решений.

12. Определить число действительных корней многочлена $x^4 - 12x^2 - 16x - 4$.

13. Доказать, что многочлен $4x^3 + 10x^2 - 5x + 5$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

14. Найти число нечетных коэффициентов в многочлене $(1+x)^{1025}$.

15. Многочлен с действительными коэффициентами удовлетворяет неравенству $p(x) \geq 0$ при всех действительных x.
Доказать, что $p(x) = u^2(x) + v^2(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ многочлены с действительными коэффициентами.