Инвариантные подпространства

1. Верно ли, что a) сумма; b) пересечение инвариантных подпространств инвариантны?

2. Верно ли, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ всегда $\mathcal{A}$-инвариантны?

3. Найдите собственные значения и собственные векторы следующих операторов:
a)–d) $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{A}$ задан матрицей

a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;

e) оператора дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше n.

4. Верно ли, что подпространство лежит в некотором собственном подпространстве тогда и только тогда, когда все его одномерные подпространства инвариантны?

Характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A}$ называется многочлен

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A}).$$

5. Докажите, что множество корней характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(t)$ совпадает с множеством собственных значений $\mathcal{A}$.

6. Докажите, что
a) у любого линейного оператора над $\mathbb{C}$ есть собственный вектор;
b) у любого линейного оператора над $\mathbb{R}$ есть одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

7. Докажите, что размерность собственного подпространства оператора $\mathcal{A}$ не превосходит кратности соответствующего корня характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(t)$.

8. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, причем все λ_i различны. Докажите, что $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.

Оператор $\mathcal{A}$ называется *диагонализируемым*, если существует базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

9. Докажите, что если все корни многочлена $f_{\mathcal{A}}(t)$ различны, то оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем.

10. Докажите, что если характеристический многочлен оператора $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ не имеет кратных корней в $\mathbb{C}$, то $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму одномерных и двумерных $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств.

11. Докажите, что оператор $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ над $\mathbb{C}$ диагонализируем тогда и только тогда, когда для каждого $\mathcal{A}$-инвариантного подпространства U найдется $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство W такое, что $V = U \oplus W$.

12. a) Докажите, что k попарно коммутирующих операторов над $\mathbb{C}$ имеют собственный вектор.
b) Верно ли, что существует базис, в котором матрицы всех операторов из п. a) верхнетреугольные?