9.11.06

Листок №11

Операторы

1. Каждый ли элемент группы $GL_2(\mathbb{C})$ обладает квадратным корнем?

2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ найти $D+N$ – разложение и с его помощью вычислить e^A.

3. Пусть $\sigma \in S_n$. Для каждого вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $A_\sigma x = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Доказать, что оператор A_σ диагонализируем и найти базис, в котором его матрица диагональна.

4. Пусть $A^k = E$. Тогда A диагонализируем над $\mathbb{C}$.

5. Каким условиям должны удовлетворять комплексные числа $a_1, \ldots, a_n$, чтобы матрица $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & & a_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ была диагонализируема над $\mathbb{C}$.

6. Показать, что матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ диагонализируема над $\mathbb{C}$, но не диагонализируема над $\mathbb{R}$.

7. Найти минимальный полином оператора дифференцирования на $\mathcal{P}_n$.

8. Найти минимальный полином линейного оператора
$p(t) \to p(t+1)$ на $\mathcal{P}_n$.

9. Пусть $p(AB) = 0$, где p – полином, а A и B линейные операторы. Если $q(t) = tp(t)$, то $q(BA) = 0$ (доказать).

Формы

10. Пусть U и V пространства с формами.
Доказать, что на тензорном произведении $U \otimes V$ существует единственная форма, такая, что если $w_1 = u_1 \otimes v_1$ и $w_2 = u_2 \otimes v_2$, то $(w_1, w_2) = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2)$.

11. Всегда ли тензорное произведение двух симметрических операторов является симметрическим оператором? Тот же вопрос для изометрических операторов?

12. Найти группу $Aut(M_n(F))$ обратимых линейных преобразований пространства матриц.

13. Доказать, что симметрические положительные матрицы образуют в $M_n(\mathbb{R})$ открытый конус K_+, не содержащий прямых ($A > 0$, если $(x, Ax) > 0,\ x \in (E^n)^*$). Кто живет на границе этого конуса?
Найти группу автоморфизмов пространства $M_n(\mathbb{R})$, сохраняющих конус K_+.