Комплексные числа

Обозначения:
$\mathbb{R}$ — вещественные числа.
$\mathbb{C}$ — комплексные числа,
т.е. числа вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$.
Числа a и b называются *вещественной* и *мнимой* частями числа z.
$|z|$ — модуль числа $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
$\arg z$ — аргумент числа $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\arg z = \varphi$.

1. Найдите $(-i)^2$, i^{10}, $(1+i)^{10}$, $(1-i)^{10}$, $(1+i)^{101}$, $(\sqrt{3}+i)^{30}$.

2. Найдите $1/(a+bi)$.

3. Найдите $z, w \in \mathbb{C}$ такие, что $z + w = z \cdot w = 2$.

4. Вычислите $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{100}$.

5. Решите уравнения: a) $z^2 = 2$; b) $z^2 = 1 + i$; c) $z^2 + 2z + 2 = 0$.

6. Докажите, что число $(3/5) + (4/5)i$ не является корнем n-ой степени из 1 ни при каком целом положительном n.

Пусть $z = a + bi$. Число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряженным* числу z.

7. Докажите, что a) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$, b) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, c) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, d) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.

8. Найдите $(1+i)/(1-i)$ и $(8+i)/(1+2i)$.

9. Решите уравнение $z^2 = 2i$.

10. Докажите, что если $z \cdot w \in \mathbb{R}$ и $z + w \in \mathbb{R}$, то либо $z = \overline{w}$, либо z и w — действительные числа.

11. Покажите, что $|z|^2 = z\overline{z}$, $|zw| = |z| \cdot |w|$.

12. Докажите, что $|z + w| \le |z| + |w|$. При каких условиях это неравенство обращается в равенство?

13. Найдите действительную и мнимую части числа z^n, где $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

14. Докажите, что произведение диагоналей четырёхугольника не больше суммы произведений его противоположных сторон. Когда это неравенство обращается в равенство?

15. Докажите, что для любого комплексного a преобразование $z \mapsto az$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

16. При каком a это преобразование будет поворотом на 30° вокруг начала координат?

17. Докажите, что преобразование $z \mapsto az$ есть композиция гомотетии с коэффициентом $|a|$ и поворота на угол $\arg a$.

18. При каких a и b преобразование $z \mapsto az + b$ является поворотом? переносом? осевой симметрией?

19. При каких a и b преобразование $z \mapsto a\overline{z} + b$ является осевой симметрией?

20. Докажите, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

21. Докажите, что комплексные числа z, для которых $z^3 = 1$, являются вершинами правильного треугольника.

22. Докажите, что для любого целого $n > 2$ и для любого комплексного a корни уравнения $z^n = a$ являются вершинами правильного n-угольника.

23. Числа 0 и z являются вершинами правильного треугольника. Найдите третью вершину.

24. На сторонах треугольника с вершинами в точках u, v, w построены равносторонние треугольники. Найдите формулы для их центров (в виде выражений, содержащих комплексные числа u, v, w). Докажите, что эти центры образуют равносторонний треугольник.

25. Докажите, что сумма всех n корней уравнения $z^n = 1$ равна 0.

26. Найдите произведение всех n корней уравнения $z^n = 1$.

27. Докажите, что треугольник с вершинами 0, 1, z подобен треугольнику с вершинами 0, 1, $\frac{1}{z}$.

28. Докажите, что точки 0, $1/z$ и $\overline{z}$ лежат на одной прямой.

29. При каком условии точки x, y, z комплексной плоскости лежат на одной прямой?

30. Найдите геометрическое место точек:
a) $|z| = 1$; b) $|z - 1| = 1$; c) $|z| = |z + 1|$; d) $|z - a| = |z - b|$.

31. Докажите, что уравнение $z + \overline{z} = z\overline{z}$ задает окружность. Найдите ее центр и радиус.

32. Нарисуйте множество точек $z \in \mathbb{C}$ таких, что $|z - 3| \leq 2$ и $|z + 4i| \leq 3$.

33. Найдите геометрическое место точек z, для которых число $(z - 1)/(z - 2)$ — чисто мнимое.

34. Докажите, что точки $z, w, 1/\overline{z}, 1/\overline{w}$ лежат на одной окружности.

35. Найдите $\{1/z \mid \Re e\, z = 1\}$.

36. При каком условии точки x, y, z, w комплексной плоскости лежат на одной окружности?

37. Докажите, что уравнение $z\overline{z} + az + \overline{a}\overline{z} + c = 0$, где a — комплексное число, а c — действительное, задает пустое множество (т.е. не имеет решений), прямую или окружность. Как определить по a и c, что именно?