3⋄1. Будет ли множество пар действительных чисел (x, y) векторным пространством над $\mathbb{R}$ если сложение и умножение на число $(c \in \mathbb{R})$ определить как:

а) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\ c(x, y) = (cx, y)$;

б) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0),\ c(x, y) = (cx, 0)$;

в) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2),\ c(x, y) = (-cx, -cy)$.

3⋄2. Пусть V векторное пространство. Покожите, что множество функций $f : M \longrightarrow V$ на множестве M со значениями в V будет векторным пространством для поточечных операций сложения и умножения на число.

3⋄3. Покажите, что множество комплекснозначных функций $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, таких что $f(-t) = \overline{f(t)}$ это линеное постранство относительно поточечных операций. Приведите пример такой функции принимающей не только действительные значения.

3⋄4. Покажте, что если векторное пространство функций на множестве M (зад. 3⋄2) конечномерно то множество M конечно.

3⋄5. Покажите, что эрмитовы матрицы $n \times n$ $(H = (h_{ij}), h_{ij} \in \mathbb{C}, h_{ij} = \overline{h_{ji}})$ образуют линейное пространство над полем действительных чисел. Посчитайте размерность этого пространства.

3⋄6. Пусть $V_1, V_2 \subset W$ векторные подпространства. Какие из ниже перечисленных множеств тоже будут подпространствами. **а)** $V_1 \cup V_2$; **б)** $V_1 \cap V_2$; **в)** $W \setminus V_1$;

г) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

3⋄7 (пространства многочленов). Найдите размерности пространств

а) многочленов степени не выше n от одной переменной;

б) многочленов степени не выше n от m переменных;

в) однородных многчленов степени n от m переменных;

г) однородных симетрических многочленов степени 8 от 4 переменных;

д) симетрических многочленов степени не выше чем 3 от 4 переменных.

3⋄8 (интерполяционная формула Лагранжа). Пусть k — поле. И пусть дано $n + 1$ попарно различных точек $a_i \in k$. Постройте $n + 1$ многочлен $f_i \in k[x]$ стпени $\leqslant n$, так чтобы $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Покажите, что f_i базис в подпространстве V_n всех многчленов степени не выше чем n. Сколько в V_n многочленов, принимающих значения b_i в a_i? Приведите явный пример такого многочлена.

3⋄9. Какова размерность пространства многочленов $f \in \mathbb{R}$ степени $\leqslant n$, обращающихся в ноль в точке $1 + 2i \in \mathbb{C}$?

3⋄10. Найдите размерности и базисы $V_1 \cap V_2$ и $V_1 + V_2$.

а) $V_1 := \big\langle \big(\ 1,\ \ 2,\ \ 0,\ \ 1\ \big), \big(\ 1,\ \ ,1,\ \ 1,\ \ 0\ \big) \big\rangle,\ V_2 := \big\langle \big(\ 1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0\ \big), \big(\ 1,\ \ 3,\ \ 0,\ \ 1\ \big) \big\rangle$;

б) $V_1 := \big\langle \big(\ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1\ \big), \big(\ 1,\ \ -1,\ \ 1,\ \ -1\ \big), \big(\ 1,\ \ 3,\ \ 1,\ \ 3\ \big) \big\rangle$,

$V_2 := \big\langle \big(\ 1,\ \ 2,\ \ 0,\ \ 2\ \big), \big(\ 1,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 2\ \big), \big(\ 3,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 1\ \big) \big\rangle$;

3⋄11. Докажите линейную независимость систем фунций:

а) $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\}$ на $[0, 2\pi]$;

б) $\{1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x, \ldots, \sin^n x\}$ на $[0, 2\pi]$;

в) $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}\}$ на $\mathbb{R}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ — разные числа);

г) $\{x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_n}\}$ на $\mathbb{R}_{>0}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ — разные числа).

3⋄12 (конечные пространства). Пусть V — n-мерное векторное пространство над конечным полем из q элементов. Сколько в V: **а)** векторов; **б)** одномерных подпространств; **в)** базисов; **г)** k-мерных подпространств?