МК НМУ. Алгебра, 1 курс, 1 семестр. 21.09.06

Линейные операторы.

1. Докажите, что множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ всех линейных отображений из V в W является векторным пространством относительно операций

1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$; 2) $(\lambda\mathcal{A})x = \lambda(\mathcal{A}x)$.

2. Докажите, что эндоморфизмы пространства V образуют алгебру с единицей над полем K. Какие элементы этой алгебры обратимы?

3. Являются ли линейными следующие отображения $\mathcal{A} : V \to W$:

a) $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (y, -x)$; b) $V = W = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, xy)$;

c) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x, y, z, t) = (x + y, y + z, z + x)$;

d) $V = W = F[x]$, $(\mathcal{A}p)(x) = q(x)p(x)$, где $q(x)$ — фиксированный элемент $F[x]$;

e) $V = W = F[x]$, $(\mathcal{A}p)(x) = p(\lambda x^2 + \nu)$, где λ, ν — фиксированные элементы F.

4. Докажите, что ядро и образ линейного отображения являются линейными пространствами.

5. Найдите ядра и образы отображений из задачи 3.

6. Докажите, что если $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,(V)$, то $\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}) + \dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}) = \dim V$.

Рангом линейного отображения $\mathcal{A}$ называется размерность его образа: $\mathrm{rk}\,\mathcal{A} = \dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A})$.

7. Докажите, что a) $\mathrm{rk}\,\mathcal{A}\mathcal{B} \leq \min(\mathrm{rk}\,\mathcal{A}, rk\mathcal{B})$; b) $\mathrm{rk}\,\mathcal{A} - \mathrm{rk}\,\mathcal{B} \leq \mathrm{rk}\,\mathcal{A} + \mathcal{B} \leq \mathrm{rk}\,\mathcal{A} + \mathrm{rk}\,\mathcal{B}$.
В каких случаях достигается равенство?

8. Докажите, что линейное отображение является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно взаимно-однозначно.

9. Докажите, что если $U, W \subset V$ — подпространства одинаковой размерности конечномерного пространства V, то найдется оператор $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,(V)$ такой, что $\mathcal{A}U = W$.

10. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,(V)$. Докажите, что либо уравнение $\mathcal{A}x = v$ имеет решение при любом $v \in V$, либо уравнение $\mathcal{A}x = 0$ имеет нетривиальное решение.

11. [**отражения**] Пусть $l : V \to K$ — линейная форма, $v \in V$ и $l(v) \neq 0$.

a) Докажите, что отображение $\mathcal{R}_{l,v} : V \to V$, определенное по правилу $\mathcal{R}_{l,v}(x) = x - 2\frac{l(x)}{l(v)}v$ является линейным оператором.

b) Найдите порядок и множество неподвижных точек оператора $\mathcal{R}_{l,v}$.

c) При каких условиях операторы $\mathcal{R}_{l_1,v_1}$ и $\mathcal{R}_{l_2,v_2}$ коммутируют?

d) Пусть $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1,1)$, $l(x,y) = 2x + y$. Нарисуйте образ прямоугольника с вершинами $(0,2)$, $(0,4)$, $(1,4)$, $(1,2)$ при отображении $\mathcal{R}_{l,v}$.

12. [**проекторы**] Пусть $\mathcal{P} : V \to V$ — линейный оператор, и $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

a) Докажите, что $V = V_0 + V_1$, где $V_0 = \operatorname{Ker}\mathcal{P}$, а $V_1 = \operatorname{Im}\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ называется *проектором* на V_1 вдоль V_0).

b) Пусть $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ — попарно коммутирующие проекторы, и $\mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_k = id$. Докажите, что $V = V_1^{(1)} \oplus \dots \oplus V_1^{(k)}$.

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ — базис V, $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$, и $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_i a_{ij}e_i$. Таблица чисел $A = (a_{ij})$ (элемент a_{ij} находится на пересечении i-той строки и j-того столбца) называется *матрицей* оператора $\mathcal{A}$ в базисе (e_i).

13. Найдите матрицы операторов из задач 3, 11 и 12 в подходящих базисах.

14. Пусть $V \subset \mathbb{R}[x]$ — пространство многочленов степени не выше n. Докажите, что следующие отображения являются линейными операторами и найдите их матрицы в базисе $(1, x, x^2, \dots, x^n)$:

a) $(\mathcal{A}p)(x) = p'(x)$; b) $(\mathcal{A}p)(x) = p(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$.

15. Пусть (a_{ij}), (b_{ij}) — матрицы операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \operatorname{End}(V)$ соответственно. Найдите матрицы операторов $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\mathcal{A}$.

16. Укажите какой-нибудь базис $\mathrm{End}\,(V)$. Выразите размерность $\mathrm{End}\,(V)$ через размерность V.

17. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$, $(f_1, \ldots, f_n)$ — базисы V, $f_i = \mathcal{C}e_i$, и $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,(V)$.

a) Выразите координаты вектора x в базисе $(f_1, \ldots, f_n)$ через его координаты и матрицу C оператора $\mathcal{C}$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

b) Выразите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе $(f_1, \ldots, f_n)$ через матрицы A, C операторов $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,(V)$. Оператор $\mathcal{A}' \in \mathrm{End}\,(V')$, удовлетворяющий условию $(\mathcal{A}'l)(v) = l(\mathcal{A}v)$, $\forall l \in V'\ \forall v \in V$ называется *сопряженным* к $\mathcal{A}$.

18. a) Докажите, что сопряженный оператор корректно определен.

b) Докажите, что отображение $(\mathcal{A} \to \mathcal{A}')$ принадлежит $Hom(\mathrm{End}\,(V), \mathrm{End}\,(V'))$ и является инволюцией (по модулю канонического изоморфизма V'' и V).

c) Выразите $(\lambda\mathcal{A})'$, $(\mathcal{A} + \mathcal{B})'$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})'$ через λ, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

d) Выразите матрицу оператора $\mathcal{A}'$ в базисе (e'_i) через матрицу оператора $\mathcal{A}$ в базисе (e_i), где $e'_i(e_j) = \delta_{ij}$.

e) Докажите, что $rk\mathcal{A} = rk\mathcal{A}'$.