28.09.06

Листок №5

Линейные, билинейные ...,
V-n-мерное векторное пространство. V*-пространство, сопряженное к V.

1. Пусть $f_1, \dots f_m \in V^*$ и $m < n$.
а) Доказать, что в V существует такой ненулевой вектор x, что $f_i(x) = 0$ для $i = 1, \dots m$.
Что означает этот результат в приложении к решениям систем линейных уравнений?
б) Каким условиям должны подчиняться числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, чтобы существовал такой вектор x, что $f_i(x) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, m$.
Что означает этот результат, если его перевести на язык систем?

2. а) Если M и N подпространства V, то $(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} + N^{\perp}$ и $(N + M)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.
б) Если $V = V_1 \oplus V_2$, то $V^* = {V_1}^* \oplus {V_2}^*$ ($\oplus$ - знак прямой суммы)

3. Три подпространства L, M и N называются независимыми, если каждое из них имеет тривиальное пересечение с суммой двух других.
а) Привести пример такой тройки (L, M, N), что $L+M+N = V$, $L \cap M = M \cap N = L \cap N = \{0\}$, но, тем не менее, эта тройка не является независимой.
б) верно ли следующее утверждение: для независимости тройки необходимо и достаточно, чтобы $\dim(L + M + N) = \dim L + \dim M + \dim N$?

4. Пусть $M < V$. Построить естественный изоморфизм пространств $(V/M)^*$ и $M^{\perp}$.

5. Пусть P_n пространство полиномов степени $< n$. Описать факторпространство P_{100}/P_{50}.

6. Пусть для всех x и y из P_n функция $b(x, y)$ определена равенством:
а) $b(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$
б) $b(x, y) = x(1) + y(1)$
в) $b(x, y) = x(1) \cdot y(1)$
г) $b(x, y) = x(1)\frac{dy}{dt}|_{t=1}$
В каких случаях функция b является билинейной формой на $P_n \times P_n$? В каких случаях она невырожденна?

7. Функция $Q(x)$ называется квадратичной формой на V, если $Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ – симметричная билинейная форма и $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x)$, $\alpha \in F$. Доказать, что если $char F \neq 2$, то квадратичная форма однозначно восстанавливается по билинейной. Что случится, если
а) $char F = 2$
б) в определении $Q(x)$ отбросить второе условие (однородности).

8. Пусть $x = (1, 1)$ и $y = (1, 1, 1)$. Найти координаты вектора $x \otimes y$ в $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$ относительно базиса $e_i \otimes f_j$, где $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2})$, а $f_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})$.

9. Определить подпространство $P_{n,m}$ полиномов от двух переменных и доказать, что пространства $P_n \otimes P_m$ и $P_{n,m}$ естественно изоморфны.

10. Верно ли, что
а) если x и y лежат в V, то $x \otimes y = y \otimes x$?
б) $U \otimes (V + W) = (U \otimes V) \oplus (U \otimes W)$
для любых трех пространств U, V, W

11. Пусть V вещественное векторное пространство. Рассмотрим тензорное произведение $V^+ = \mathbb{C} \otimes V$, где $\mathbb{C}$ рассматривается как 2-пространство над $\mathbb{R}$. Определим умножение элементов из V^+ на комплексные числа, полагая $\alpha(x \otimes y) = \alpha x \otimes y$, $x \in \mathbb{C}$, $y \in V$.
Показать, что относительно сложения векторов и так определенного умножения на комплексные числа, V^+ является комплексным векторным пространством.
V^+ называется комплексификацией пространства V.

12. Чему равна размерность $\dim_{\mathbb{C}} V^+$? А $\dim_{\mathbb{R}} V^+$?

13. Обобщите конструкцию задачи 11 на случай конечного расширения K/F основного поля F, вычислите размерности $\dim_K V^+$ и $\dim_F V^+$.

14. Доказать, что если A и B операторы дифференцирования на P_n и P_m соответственно, то $C = A \otimes B$ есть смешанное частное дифференцирование на пространстве $P_n \otimes P_m \simeq P_{n,m}$.

15. При лексиграфическом упорядочении произведения базисов V и W матрица оператора $A \otimes B$ оказывается кронекеровским произведением матриц операторов A и B. Существует ли такое упорядочение этих базисных векторов, при котором матрица оператора $A \otimes B$ оказалась бы кронекеровским произведением матриц B и A?

16. $\ker(A \otimes B) = \ker A \otimes W + V \otimes \ker B$. Доказать.