6◇1. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2)$ вектора из $\mathbb{R}^2$. Какие из приведенных ниже отображений f задают билинейные формы? **а)** $f(\bar{x}, \bar{y}) = 1$; **б)** $f(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2$; **в)** $f(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$; **г)** $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

6◇2. На линейном пространстве матриц размера 2×3 с элементами из поля $\mathbb{R}$ задана билинейная форма $f(X, Y) = \mathrm{tr}\,(X^t A Y)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу f в базисе $\{E^{11}, E^{12}, E^{13}, E^{21}, E^{22}, E^{23}\}$. У матрицы E^{ij} на пересечение строки с номером i и столбца с номером j стоит 1, в остальных местах 0.

6◇3. Рассмотрим $M_n(\mathbb{C})$ пространство комплексных матриц $n \times n$.

$$f(A, B) = n\mathrm{tr}\,(AB) - \mathrm{tr}\,(A)\mathrm{tr}\,(B).$$

Покажите, что

а) f симметричная билинейная форма;

б) f вырожденная, но ее сужение на подпространство матриц с нулевым следом невырожденная билинейная форма;

в) сужение f на подпространство $V_1 = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \mathrm{tr}\, A = 0, A^+ = -A\}$ $(A^+ = \bar{A}^t)$ отрицательно определенная форма;

г) $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : f(A, B) = 0 \ \forall B \in M_n(\mathbb{C})\}$ линейное подпространство и найдите его размерность;

д) $\mathrm{rk}\, f = \dim(M_n(\mathbb{C})) - \dim W$.

6◇4. Пусть G матрица билинейной формы g на пространстве V в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Выразите матрицу g в новом базисе $e`_1, e`_2, \dots, e`_n$ через G и матрицу перехода C.

6◇5. Пусть $g(\alpha, \beta)$ билинейная форма на V, а G ее матрица в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$. Определим отображения $L_g \colon V \longrightarrow V^*$ и $R_g \colon V \longrightarrow V^*$ как $(L_g(\alpha))(\beta) = g(\alpha, \beta)$ и $(R_g(\alpha))(\beta) = g(\beta, \alpha)$.

а) Покажите, что L_g и R_g линейные отображения;

б) Выпишите матрицу L_g и R_g в базисах $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \in V$, $\{e`_1, e`_2, \dots, e`_n\} \in V^*$, где $e`_i(e_j) = \delta_{ij}$ двойственный базис;

в) Покажите, что $\mathrm{rk}\, L_g = \mathrm{rk}\, R_g$;

г) Что можно сказать про g если L_g изоморфизм;

6◇6. Докажите билинейная форма g симметрична $(f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)) \Longleftrightarrow$ матрица g симметрическая $(A = A^t)$ в любом базисе.

6◇7. Докажите что для любой симметричной билинейной формы g на V (V — векторное пространство над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) найдется базис в котором ее матрица G диагональна.

6◇8. Пусть g симметричная билинейная форма на пространстве V над полем $\mathbb{C}$. Докажите, что найдется базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ такой, что $g(e_i, e_j) = 0$ если $i \neq j$, $g(e_i, e_i) = 1$ если $i = 1 \dots k$, $g(e_i, e_i) = 0$ если $i > k$. Зависит ли число k от выбора такого базиса?

6◇9. Пусть g симметричная билинейная форма на пространстве V над полем $\mathbb{R}$. Докажите, что найдется базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ такой, что $g(e_i, e_j) = 0$ если $i \neq j$, $g(e_i, e_i) = 1$ если $i = 1 \dots k_1$, $g(e_i, e_i) = -1$ если $i = k_1 + 1 \dots k_1 + k + 2$, $g(e_i, e_i) = 0$ если $i > k_1 + k_2$. Зависят ли числа k_1 и k_2 от выбора такого яазиса?

6◇10. Пусть

$$f = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$$

$$g = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$$

квадратичные формы. Приведите одновременно одну из этих форм к каноническому виду, а вторую к диагональному.

6◇11. Пусть g антисимметричная билинейная форма на n-мерном пространстве V. Докажите, что найдутся пары векторов $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_k, \beta_k)$ такие, что $g(\alpha_i, \beta_i) = 1, i = 1, \dots, k$,

$g(\alpha_i, \alpha_j) = g(\beta_i, \beta_j) = g(\alpha_i, \beta_j) = 0, i \neq j$ и $V =< \alpha_1, \beta_1 > \oplus \ldots \oplus < \alpha_k, \beta_k > \oplus W_0$, где сужение g на W_0 это нулевая форма. Как выглядит матрица g в базисе $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k, w_1, \ldots, w_l\}$, $w_i \in W_0$. Зависит ли число k от выбора такого базиса.

6◇12 (Критерий Сильвестра). Пусть G — матрица Грамма симметричной билинейной формы g, а Δ_k — ее главные миноры (определители матриц $k \times k$, совпадающих с левым верхним углом матрицы G). Докажите, что **а)** g положительно определена $\Longleftrightarrow \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$; **б)** если $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \neq 0$, то количество -1 в сигнатуре равно количеству премен знака в последовательности $1 = \Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Какие должны быть знаки, что бы g была отрицательно определенной.

6◇13. Пусть на пространстве многочленов от одной переменной $\mathbb{R}[x]$ задан стандартный базис $1, x, x^2, \ldots$. Докажите, что после применения к нему процесса ортогонализации Грамма-Шмидта получим:

а) (многочлены Лежандра) $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n]$, если $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$;

б) (многочлены Чебышева) $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, если $(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

в) (многочлены Лаггера) $P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n]$, если $(P, Q) = \int_{0}^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$;

г) (многочлены Эрмита) $P_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$, если $(P, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2}dx$.