19.10.06

Листок №8

Задачи

1. Пусть U – гиперболическая плоскость и $SO(U)$ – группа изометрий U с определителем 1 ($char \neq 2$).
Доказать, что
а) $SO(U) \simeq SL_2(F)$, если U – симплектическая плоскость
б) $SO(U) \simeq F^*$, если U – ортогональная плоскость.

2. Пусть V комплексная (вещественная) евклидова плоскость. Доказать, что в базисе Сильвестра группа $SO(V)$ записывается матрицами $\begin{pmatrix} \cos z & \sin z \\ -\sin z & \cos z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{C}$ ($z \in \mathbb{R}$).

3. Пусть $(e_1, \ldots, e_m)$ – базис изотропного подпространства. Доказать, что всегда найдется такая коллекция изотропных векторов $(f_1, \ldots, f_m)$, что $(e_i, f_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ и $(f_i, f_j) = 0$.

4. Пусть G^+ – группа изометрий вещественного ортогонального пространства $(\mathbb{R}^2, x_1y_1 - x_2y_2)$ с определителем 1. Доказать, что в базисе $\{(1,0),(0,1)\}$ группа G^+ записывается матрицами $\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Пусть $f_1 = 2x_1y_1 - 5x_2y_2$ и $f_2 = x_1y_1 - 10x_2y_2$. Изометричны ли пространства $(\mathbb{R}^2, f_1)$ и $(\mathbb{R}^2, f_2)$? А пространства $(\mathbb{Q}^2, f_1)$ и $(\mathbb{Q}^2, f_2)$?

6. Пусть E^n – вещественное (или комплексное) евклидово пространство. Доказать, что группа его изометрий (ортогональная группа) порождена отражениями.

7. Доказать, что группа Sp_{2n} порождена трансвекциями (т.е. преобразованиями вида $t \to t + (t,v)v$).

8. Максимальное изотропное подпространство симплектического пространства называется лагранжевым. Не используя теорему Витта, доказать, что симплектическая группа транзитивно действует на множестве лагранжевых подпространств.

9. Какой может быть размерность анизотропного ортогонального пространства над полем F_2?

10. Дать классификацию пятимерных ортогональных пространств над полем F_2.

11. Доказать, что над полем F_3 существует единственное с точностью до изоморфизма трехмерное ортогональное пространство (V, f).

В связи с этим обозначим группу $Isom(V, f)$ через $O_3(F_3)$.

12. Найти порядок группы $O_3(F_3)$.

13. Пусть $\{e_1, \ldots, e_s\}$ и $\{f_1, \ldots, f_s\}$ две коллекции векторов в невырожденном пространстве (V, f). Для того, чтобы существовал такой элемент $g \in Isom(V, f)$, что $g(e_i) = f_i$, $i = 1, \ldots, s$, необходимо и достаточно, чтобы $G(e_1, \ldots, e_s) = G(f_1, \ldots, f_s)$.