9◇1 (Алгебра Грассмана). Пусть V это n - мерное векторное пространство над полем k. Тогда $\bigwedge^{\cdot} V$ — алгебра с единицей над полем k относительно операции $\wedge$, порожденная векторами $v \in V$ и соотношениями $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$. Векторное подпространство $\bigwedge^{\cdot} V$ натянутое на произведения вида $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_l$ обозначается $\bigwedge^{l} V$.

а) Найдите размерность $\bigwedge^{l} V$.

б) Найдите размерность $\bigwedge^{\cdot} V$ как векторного пространства над k.

9◇2. Докажите, что при $\dim V > 2$ пространства $\bigwedge^2(\bigwedge^2(V))$ и $\bigwedge^4 V$ не совпадают.

9◇3. Найдите сигнатуру квадратичной формы $Q(w)$ на $\bigwedge^2 \mathbb{R}^4$, определенной формулой $w \wedge w = Q(w) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, где $\{e_j\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^4$.

9◇4. Пусть $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_i$.

а) Докажите, что

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_n = \det(a_{ji}) e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$$

б) Докажите, что

$$v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \ldots \wedge v_{j_k} = \sum_{\{i_1, i_2, \ldots i_k\}} M_{j_1, j_2, \ldots, j_k; i_1, i_2, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k},$$

где $M_{j_1, j_2, \ldots, j_k; i_1, i_2, \ldots, i_k}$ — минор матрицы (a_{ji}), стоящий на пересечении строк с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$ и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

9◇5. Найдите центр алгебры $\bigwedge^{\cdot} V$. (Центр — это элементы перестановочные со всеми элементами алгебры.)

Определения Элементы $\bigwedge^2 V$ называются *бивекторами.* Бивектор w называется *разложимым* если $w = v_1 \wedge v_2, v_1, v_2 \in V$.

9◇6. Докажите, что бивектор w разложим тогда и только тогда, когда $w \wedge w = 0$.

9◇7. Докажите, что для $w \in \bigwedge^p V, x \in V, x \neq 0$, равенство $w \wedge x = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $w = x \wedge \xi$ для некоторого $\xi \in \bigwedge^{p-1} V$.

9◇8 (Квадрика Плюккера.). Пусть V — четырехмерное пространство, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — некоторый базис, $\mathrm{Gr}(2, V)$— множество всех двумерных подпространств в V. Пусть подпространство $U \in \mathrm{Gr}(2, V)$ задано своим базисом $\{u_1, u_2\}$. Коэффициенты p_{ij} в разложении $u_1 \wedge u_2 = \sum_{i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$ называют плюккеровыми координатами подпространства U.

а) Непосредственно проверьте, что $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$;

б) Могут ли числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$ быть минорами порядка 2 некоторой матрицы размера 2×4.

9◇9. Найдите след оператора $\bigwedge^2(A)$, если известна матрица оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9◇10 (Алгебра Клиффорда). Пусть V это n - мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\, , \,)$. Тогда $C(V)$ — алгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$ относительно операции $\cdot$, порожденная векторами $v \in V$ и соотношениями $v_1 \cdot v_2 + v_2 \cdot v_1 = (v_1, v_2)$. Найдите размерность $C(V)$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$.

Определение Для элементов алгебры с единицей определим

$$\exp(w) = 1 + w + \frac{1}{2} w \cdot w + \frac{1}{3!} w \cdot w \cdot w + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n$$

9◇11. Пусть $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ матрицы из $M_2(\mathbb{C})$. Для произвольных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ найдите $\exp(\alpha_1 i \sigma_1 + \alpha_2 i \sigma_2 + \alpha_3 i \sigma_3)$.

9◇12. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный базис в V. Вычислите в алгебре Клиффорда $C(V)$ $\exp(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i)$.

9◇13 (Оператор Дирака. Извлечение корня из оператора Лапласа.). Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Найдите матрицы $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$(A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y})^2 = E\Delta.$$