Письменный домашний экзамен по курсу Алгебра - III

Порядок сдачи экзамена. Для получения оценки «отлично» заведомо достаточно набрать 71 балл. Задачи решаются письменно и сдаются или в мой почтовый ящик в учебной части (комн. 301), или (если учебная часть закрыта) на вахту на первом этаже, с просьбой передать Ваше послание в учебную часть А. Л. Городенцеву. Приём работ заканчивается во вторник, 19-го декабря в $18^{\underline{00}}$. Оценки, скорее всего, будут известны во второй половине дня в четверг, 21-го декабря. Удачи!

Задача 1 (10 баллов). Опишите фактор группу автоморфизмов симметрической группы $\mathfrak{S}_6$ по подгруппе внутренних автоморфизмов.

Задача 2 (10 баллов). Сколько силовских p-подгрупп в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ (где $\mathbb{F}_p$ — поле p элементов) ?

Задача 3 (10 баллов). Опишите все ассоциативные $\mathbb{R}$-подалгебры с единицей $A \subset \mathrm{Mat}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ размерности $\dim_{\mathbb{R}} A > 31$.

Задача 4 (10 баллов). Конечная группа транзитивно действует на множестве, содержащем более одного элемента. Всегда ли найдётся элемент группы, действующий без неподвижных точек?

Задача 5 (10 баллов). Обозначим через V_n неприводимый $\mathfrak{sl}_2$-модуль размерности n. При каких k, ℓ, m $\mathfrak{sl}_2$-модуль $V_k \otimes V_\ell \otimes V_m$ содержит однократный тривиальный $\mathfrak{sl}_2$-подмодуль?

Задача 6. Перечислите все

- **а) (10 баллов)** неабелевы группы порядка 21
- **б) (10 баллов)** их неприводимые характеры[1].

Задача 7. Обозначим через $C_{\lambda\mu\nu}$ кратность вхождения неприводимого $\mathfrak{S}_n$-модуля V_ν в тензорное произведение $\mathfrak{S}_n$-модулей $V_\lambda \otimes V_\mu$.

- **а) (10 баллов)** Вычислите $C_{\lambda\mu\nu}$ для всех λ, μ при $\nu = (n)$ и $\nu = 1^n$.
- **б) (10 баллов)** Симметричны ли $C_{\lambda\mu\nu}$ по λ, μ, ν?

Задача 8 (10 баллов). Скажем, что функтор $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ перестановочен с (ко) пределами, если для любого $L \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и любой диаграммы $\mathscr{N} \xrightarrow{\Phi} \mathscr{C}$ из того, что L является (ко) пределом Φ в $\mathscr{C}$, вытекает, что $F(L)$ является (ко) пределом диаграммы $F\circ\Phi$ в $\mathscr{D}$. Верно ли, что всякий левый сопряжённый функтор перестановочен с копределами, а всякий правый — с пределами?

[1] просто к слову: а как устроена группа аффинно линейных автоморфизмов прямой $\mathbb{A}_1$ над полем $\mathbb{F}_7$?