Задачи по алгебраической геометрии 14 сентября 2006

1. Пусть $f(s,t)$ — неприводимый квадратичный многочлен. Докажите, что подмногообразие $\{f=0\}\subset\mathbb{A}^2$ изоморфно либо $\mathbb{A}^1$, либо $\mathbb{A}^1\backslash\{0\}$.

2. Докажите, что произведение топологий (Зариского) на $\mathbb{A}^1$ *не равно* топологии на $\mathbb{A}^2$.

3. Докажите, что нётерово топологическое пространство может быть хаусдорфовым только тогда, когда оно состоит из конечного множества точек с дискретной топологией.

4. Пусть морфизм $\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^2$ задан формулой $t\mapsto(t^2,t^3)$. Докажите, что морфизм биективен и является гомеоморфизмом на подмногообразие $\{x^3-y^2=0\}\subset\mathbb{A}^2$, но *не является изоморфизмом* с этим подмногообразием.

5. Пусть характеристика основного поля равна $p>0$. Определим морфизм $\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1$ формулой $t\mapsto t^p$ (Фробениус). Докажите, что он является гомеоморфизмом, но не является изоморфизмом.

Задачи по алгебраической геометрии 2 октября 2006

1. Пусть $\pi: X\to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств; F — пучок на X; а G — пучок на Y.

a) Для $V\subset Y$, положим $\pi_*F(V):=F(\pi^{-1}(V))$. Докажите, что π_*F — пучок на Y.

b) Для $W\subset X$, рассмотрим $\lim\limits_{V\supset\pi(W)} G(V)$. Приведите пример, когда получается не пучок, а всего лишь предпучок. Его пучкование называется обратным образом $\pi^{-1}G$.

c) Постройте естественные отображения $\pi^{-1}\pi_*F\to F$ и $G\to\pi_*\pi^{-1}G$. Докажите, что $Hom_X(\pi^{-1}G,F)=Hom_Y(G,\pi_*F)$.

2. Пусть $x\in X$, и A — абелева группа. Определим пучок небоскреб A_x так: $A_x(U)=0$, если $x\notin U$, и $A_x(U)=A$, если $x\in U$. Докажите, что $A_x=i_*\underline{A}$, где i — вложение замыкания $\overline{x}$ точки x в X, а $\underline{A}$ — постоянный пучок на $\overline{x}$.

3. Пусть $j:\ U\hookrightarrow X$ — вложение открытого подмножества, и $i:\ Z\hookrightarrow X$ — вложение его замкнутого дополнения.

a) Если F — пучок на Z, то слой i_*F_x равен F_x, если $x\in Z$, и $i_*F_x=0$, если $x\notin Z$. Поэтому i_*F иногда называется продолжением F нулем.

b) Пусть теперь F — пучок на U, и $j_!F$ — пучок на X, являющийся пучкованием предпучка $V\mapsto F(V)$, если $V\subset U$, и $V\mapsto 0$, если $V\not\subset U$. Докажите, что слой $j_!F_x$ равен F_x, если $x\in U$, и $j_!F_x=0$, если $x\notin U$. Поэтому $j_!F$ называется продолжением F нулем.

c) Пусть наконец F — пучок на X. Докажите, что есть точная последовательность пучков $0 \to j_! j^{-1} F \to F \to i_* i^{-1} F \to 0$.

4. Для сечения $\sigma \in F(V)$ определим его носитель $supp(\sigma) \subset V$ как множество точек $x \in V$ таких, что образ σ_x в слое F_x не равен нулю.

a) Докажите, что $supp(\sigma)$ — замкнутое подмножество V.

b) Если $Z \subset X$ — замкнутое подмножество, определим $F_Z(V)$ как подгруппу в $F(V)$, образованную теми сечениями, носитель которых содержится в $Z \cap V$. Докажите, что $V \mapsto F_Z(V)$ — пучок. Он называется подпучком с носителями в Z.

c) Докажите, что есть точная последовательность (в обозначениях задачи 3) $0 \to F_Z \to F \to j_* j^{-1} F$, и более того, если F вялый, то можно дописать справа нуль.

5. Пусть $\mathcal{O}_X$ — структурный пучок многообразия X, а $Y \subset X$ — замкнутое подмногообразие. Для открытого $U \subset X$ обозначим $\mathcal{J}_Y(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ идеал регулярных функций, обращающихся в нуль на $Y \cap U$.

a) Докажите, что $U \mapsto \mathcal{J}_Y(U)$ — пучок; он называется пучком идеалов Y.

b) Докажите, что факторпучок $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y$ изоморфен пучку $i_*\mathcal{O}_Y$, где $i: Y \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение, а $\mathcal{O}_Y$ — структурный пучок Y.

Задачи по алгебраической геометрии 9 октября 2006

1. a) Пусть X — многообразие (не обязательно аффинное), $f \in k[X] = A$, и $X_f \subset X$ — множество точек, где f не обращается в нуль. Докажите, что $k[X_f] = A_f$.

b) Докажите, что X аффинно тогда и только тогда, когда найдется конечное множество $f_1, \dots, f_n \in A$ т.ч. X_{f_i} все аффинны, и $f_1, \dots, f_n$ порождают единичный идеал A.

2. Докажите, что морфизм $\pi: X \to Y$ является аффинным тогда и только тогда, когда для *каждого* аффинного открытого подмножества $V \subset Y$ его прообраз $\pi^{-1}(V)$ является аффинным многообразием.

3. a) Пусть $\mathcal{A}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_Y$-алгебр (т.е. $\mathcal{A}(V)$ является конечнопорожденной $k[V]$-алгеброй без нильпотентов). Докажите, что существует единственное многообразие X и морфизм $\pi: X \to Y$, такой что для каждого открытого аффинного подмножества $V \subset Y$ имеет место изоморфизм $\pi^{-1}(V) \simeq Specm(\mathcal{A}(V))$ и для каждого вложения открытых аффинных подмножеств $U \subset V$ морфизм $\pi^{-1}(U) \hookrightarrow \pi^{-1}(V)$ соответствует гомоморфизму ограничения $\mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U)$. Многообразие X обозначается $Specm(\mathcal{A})$.

b) Докажите, что морфизм $\pi: X = Specm(\mathcal{A}) \to Y$ аффиннен, и $\mathcal{A} = \pi_* \mathcal{O}_X$. Обратно, если $\pi: X \to Y$ — аффинный морфизм, то $\mathcal{A} := \pi_* \mathcal{O}_X$ является квазикогерентным пучком $\mathcal{O}_Y$-алгебр, и $X = Specm(\mathcal{A})$.

c) Докажите, что π_* задает эквивалентность категории квазикогерентных $\mathcal{O}_X$-модулей и категории квазикогерентных $\mathcal{A}$-модулей (т.е. квазикогерентных $\mathcal{O}_Y$-модулей, обладающих структурой $\mathcal{A}$-модулей).

4. *Векторным расслоением* ранга n над многообразием Y называется морфизм $\pi: X \to Y$ со следующей дополнительной структурой: в некотором покрытии $Y = \bigcup U_i$ заданы изоморфизмы $\psi_i: \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{A}^n \times U_i$ т.ч. для любых i, j и любого открытого аффинного подмножества $V = Specm(A) \subset U_i \cap U_j$ автоморфизм $\psi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1}$ пространства $\mathbb{A}^n \times V = Specm(A[t_1, \ldots, t_n])$ задается A-линейным автоморфизмом ϕ алгебры $A[t_1, \ldots, t_n]$, т.е. $\phi(a) = a$ для любого $a \in A$, и $\phi(t_k) = \sum a_{kl} t_l$, где $a_{kl} \in A$. *Изоморфизмом* $\eta: (X, \pi, \{U_i\}, \{\psi_i\}) \to (X', \pi', \{U'_k\}, \{\psi'_k\})$ векторных расслоений называется изоморфизм многообразий $\eta: X \to X'$ т.ч. $\pi = \pi' \circ \eta$, и X, π вместе с покрытием $Y = \bigcup U_i \cup \bigcup U'_k$ и изоморфизмами $\psi_i, \psi'_k \circ \eta$ тоже определяют структуру векторного расслоения на X. Пусть, наконец, $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга n на Y с симметрической алгеброй $Sym\mathcal{E}$, и $X := Specm(Sym\mathcal{E})$ с морфизмом проекции $\pi: X \to Y$. Для каждого открытого аффинного подмножества $U \subset Y$, для которого ограничение $\mathcal{E}|_U$ свободно, выберем базис в $\mathcal{E}|_U$, и пусть $\psi: \pi^{-1}(U) \to \mathbb{A}^n \times U$ — изоморфизм, получающийся при отождествлении $Sym\mathcal{E}(U)$ с $\mathcal{O}_Y(U)[t_1, \ldots, t_n]$. Докажите, что тогда $(X, \pi, \{U\}, \{\psi\})$ — векторное расслоение ранга n над Y, которое с точностью до изоморфизма не зависит от выбора базисов в $\mathcal{E}|_U$. Будем называть его векторным расслоением, *ассоциированным с* $\mathcal{E}$, и обозначать $Vect(\mathcal{E})$.

b) *Сечением* произвольного морфизма $\pi: X \to Y$ над открытым множеством $U \subset Y$ называется морфизм $\sigma: U \to X$ т.ч. $\pi \circ \sigma = Id_U$. Ясно, что сечения образуют пучок множеств, который будет обозначаться $Sect_{X/Y}$. Докажите, что если $\pi: X \to Y$ — векторное расслоение ранга n, то пучок $Sect_{X/Y}$ обладает естественной структурой $\mathcal{O}_Y$-модуля и является локально свободным $\mathcal{O}_Y$-модулем ранга n.

c) Пусть опять $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга n на Y, а $X = Vect(\mathcal{E})$, и $\mathcal{S} = Sect_{X/Y}$ — пучок сечений X над Y. Докажите, что $\mathcal{S} \simeq \mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y)$, причем этот изоморфизм осуществляется следующим образом. Сечение $\sigma \in \mathcal{E}^\vee(V)$ над произвольным открытым подмножеством $V \subset Y$ можно рассматривать как элемент $\sigma \in Hom_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}|_V, \mathcal{O}_V)$, так что σ определяет гомоморфизм $\mathcal{O}_V$-алгебр $Sym\mathcal{E}|_V \to \mathcal{O}_V$, который определяет в свою очередь морфизм спектров $V = Specm(\mathcal{O}_V) \to Specm(Sym\mathcal{E}|_V) = \pi^{-1}(V)$, т.е. некоторое сечение X над Y. Так вот, докажите, что это соответствие и задает искомый изоморфизм $\mathcal{E}^\vee$ на $\mathcal{S}$.

d) Докажите, что тем самым установлена биекция между классами изоморфизма локально свободных пучков ранга n на Y и классами изоморфизма векторных расслоений ранга n на Y.

Задачи по алгебраической геометрии 14 октября 2006

Множество эффективных дивизоров степени d в $\mathbb{P}^N$, как мы знаем, равно множеству ненулевых однородных многочленов степени d от $N+1$ переменной с точностью до пропорциональности, т.е. это множество является множеством точек $\mathbb{P}Sym^d(k^{N+1})$. Иначе говоря, дивизоры степени d параметризуются алгебраическим многообразием $\mathbb{P}Sym^d(k^{N+1})$, причем открытое подмногообразие параметризует неприводимые дивизоры. Цель этого листка — аналогичное утверждение для циклов (формальных положительных линейных комбинаций неприводимых подмногообразий размерности $n < N$) произвольной коразмерности — *координаты Чжоу*.

1. Пусть $\pi : X \to Y$ сюръективный морфизм неприводимых многообразий размерностей n, m. Докажите, что

a) для любой $y \in Y$ и для любой неприводимой компоненты Z слоя $\pi^{-1}(y)$ имеем $\dim Z \geq n - m$.

b) есть непустое открытое $U \subset Y$ т.ч. для любой $y \in U$ имеем $\dim \pi^{-1}(y) = n - m$.

c) $\dim \pi^{-1}(y)$ — полунепрерывная сверху функция на Y.

2. Пусть теперь в условиях предыдущей задачи X, Y проективны; Y и все слои $\pi^{-1}(y)$ неприводимы одинаковой размерности. Докажите, что X неприводимо.

3. Множество гиперплоскостей в $\mathbb{P}^N$ естественно параметризуется точками двойственного проективного пространства $\check{\mathbb{P}}$ (ненулевые линейные функционалы на k^{N+1} с точностью до пропорциональности). Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — неприводимое проективное многообразие размерности n. Рассмотрим замкнутое подмногообразие $\Gamma \subset \check{\mathbb{P}}^{n+1} \times X$, образованное наборами $(\xi_0, \ldots, \xi_n, x)$ т.ч. все гиперплоскости $\xi_i \subset \mathbb{P}^N$ содержат точку $x \in X$. Имеем две проекции:

$\phi:\ \Gamma\to\check{\mathbb{P}}^{n+1}$, $\psi:\ \Gamma\to X$. Докажите, что Γ неприводимо размерности $N(n+1)-1$.

4. Докажите, что a) $\phi(\Gamma)$ — неприводимое замкнутое подмногообразие $\check{\mathbb{P}}^{n+1}$ коразмерности 1.

b) существует многочлен F_X от $n+1$ групп по $N+1$ переменных, однородный степеней d_i по каждой группе, без кратных множителей, т.ч. $\phi(\Gamma)$ задается единственным уравнением F_X. Он называется *ассоциированной формой* многообразия X, а его коэффициенты называются *координатами Чжоу* многообразия X.

5. Докажите, что $x\in\mathbb{P}^N$ лежит в X тогда и только тогда, когда любые содержащие ее $n+1$ гиперплоскостей $\xi_0,\ldots,\xi_n$ удовлетворяют соотношению $F_X(\xi_0,\ldots,\xi_n)=0$. Тем самым, X однозначно восстанавливается по F_X.

6. Докажите, что a) все степени d_i из задачи 4 равны друг другу. Будем обозначать их d.

b) d равно максимуму числа точек пересечения $E\cap X$, где $E\subset\mathbb{P}^N$ — линейное подпространство размерности $N-n$ т.ч. $E\cap X$ конечно. Это число называется *степенью* X.

Множество всех ненулевых форм F от $n+1$ групп по $N+1$ переменных, однородных степени d по каждой группе, с точностью до умножения на скаляр, — это точки некоторого проективного пространства $\mathbb{P}^{M(N,n,d)}$. Можно доказать, что формы F, имеющие вид F_X для некоторого неприводимого X размерности n и степени d, образуют квазипроективное подмногообразие $C_{N,n,d}\subset\mathbb{P}^{M(N,n,d)}$. Если же циклу $Y=\sum n_iX_i$ ($\dim X_i=n$, $\sum n_i\deg(X_i)=d$, все X_i неприводимы) сопоставить форму $F_Y:=\prod F_{X_i}^{n_i}$, то формы F, имеющие вид F_Y для некоторого n-мерного цикла Y степени d, будут образовывать *проективное* подмногообразие $B_{N,n,d}$, содержащее $C_{N,n,d}$ в качестве открытого (но необязательно плотного) подмножества. Оно называется *многообразием Чжоу.*

7. Докажите, что $B_{3,1,3}$ имеет 4 неприводимых компоненты размерности 12.

Задачи по алгебраической геометрии 16 октября 2006

Цель этого листка — алгебраическое определение степени проективного многообразия (*полином Гильберта*).

1. Многочлен $P\in\mathbb{Q}[z]$ называется *числовым*, если $P(n)\in\mathbb{Z}$ при $n\gg 0$.

a) Докажите, что найдутся целые числа $c_0,\ldots,c_r$ т.ч. $P(z)=c_0\binom{z}{r}+c_1\binom{z}{r-1}+\ldots+c_r$. В частности, $P(n)\in\mathbb{Z}$ для всех $n\in\mathbb{Z}$.

b) Пусть $f:\ \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ — произвольная функция. Предположим, что найдется числовой многочлен $Q(z)$ т.ч. разностная функция $\Delta f = f(n+1)-f(n)$ совпадает с $Q(n)$ при $n\gg 0$. Тогда найдется числовой многочлен $P(z)$ т.ч. $f(n)=P(n)$ для всех $n\gg 0$.

2. Пусть $M=\oplus M_d$ — конечнопорожденный градуированный $S=\mathsf{k}[t_0,\ldots,t_n]$-модуль. Для $l\in\mathbb{Z}$ определим *скрученный* модуль $M(l)$ как $M(l)_d := M_{d+l}$. Определим однородный идеал $Ann(M)\subset S$ (аннулятор M) как $\{s\in S:\ s\cdot M=0\}$. Докажите, что

a) существует фильтрация $0=M^0\subset M^1\subset\ldots\subset M^r=M$ т.ч. для каждого i имеем $M^i/M^{i-1}\simeq (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$, где $\mathfrak{p}_i\subset S$ — однородный простой идеал, а $l_i\in\mathbb{Z}$.

b) Если $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал S, то $\mathfrak{p}\supset Ann(M)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}_i$ для некоторого i. В частности, минимальные элементы множества $\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\}$ в точности совпадают с однородными простыми идеалами, минимальными среди содержащих $Ann(M)$.

c) Для каждого такого $\mathfrak{p}$ число его вхождений во множество $\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_r\}$ равно длине модуля $M_\mathfrak{p}$ над локальным кольцом $S_\mathfrak{p}$. В частности, это число не зависит от выбора фильтрации в пункте a). Оно называется *кратностью* M *в* $\mathfrak{p}$ и обозначается $\mu_\mathfrak{p}(M)$.

3. Определим функцию Гильберта ϕ_M конечнопорожденного градуированного S-модуля M как $\phi_M(l):=\dim M_l$. Докажите, что

a) существует единственный многочлен $P_M(z)\in\mathbb{Z}[z]$ т.ч. $\phi_M(l)=P_M(l)$ при $l\gg 0$ (*многочлен Гильберта*).

b) $\deg P_M$ равна размерности проективного многообразия в $\mathbb{P}^n$, определенного идеалом $Ann(M)$.

Для проективного многообразия $Y\subset\mathbb{P}^n$ многочленом Гильберта P_Y будем называть многочлен Гильберта S-модуля $\mathsf{k}[C(Y)]$ (однородного координатного кольца Y). Если $\dim Y=r$, старший коэффициент P_Y, помноженный на $r!$, будем называть *степенью* Y.

4. a) Докажите, что $\deg Y$ — целое положительное число.

b) Пусть $Y=Y_1\cup Y_2$, где $\dim Y_1=\dim Y_2=r>\dim(Y_1\cap Y_2)$. Тогда $\deg Y=\deg Y_1+\deg Y_2$.

c) $\deg\mathbb{P}^n=1$.

d) Если $H\subset\mathbb{P}^n$ — гиперповерхность, заданная однородным многочленом степени d, то $\deg H=d$.

e) Если $Y\not\subset H$, и Y равноразмерно размерности r, то мы знаем, что $Y\cap H=Z_1\cup\ldots\cup Z_s$, где Z_j — неприводимые многообразия размерности $r-1$. *Кратность пересечения* Y и H вдоль Z_j определяется как $\iota(Y,H;Z_j):=\mu_{\mathfrak{p}_j}(S/(I_Y+I_H))$, где $\mathfrak{p}_j$, I_Y, I_H — однородные идеалы многообразий Z_j, Y, H. Докажите, что $\sum_{j=1}^{s} \iota(Y,H;Z_j)\cdot \deg Z_j = \deg Y \cdot \deg H$ (*теорема Безу*).

f) Докажите, что $\deg Y$ равно числу точек пересечения Y с общим линейным подпространством дополнительной размерности. Таким образом, определения из данного листка и из предыдущего согласованы.

5. a) Докажите, что степень образа вложения Сегре $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s \hookrightarrow \mathbb{P}^{(r+1)(s+1)-1}$ равна $\binom{r+s}{r}$.

b) Докажите, что степень образа d-кратного вложения Веронезе $\mathbb{P}^r$ в $\mathbb{P}(Sym^d \mathsf{k}^{r+1})$ равна d^r.

Задачи по алгебраической геометрии 30 октября 2006

1. Пусть $f \in \mathsf{k}[t_1,\dots,t_n]$. Докажите, что $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i$.

2. Пусть X, Y — аффинные многообразия. Докажите, что $\Omega(X\times Y) = \Omega(X)\otimes_{\mathsf{k}[X]} \mathsf{k}[X\times Y] \oplus \Omega(Y)\otimes_{\mathsf{k}[Y]} \mathsf{k}[X\times Y]$.

3. Пусть $C \subset \mathbb{A}^2$ задано уравнением $x^2+y^2=1$. Докажите, что

a) всякая регулярная функция на C однозначно записывается в виде $f(y)+xg(y)$, где f, g — многочлены.

b) всякая регулярная дифференциальная форма на C однозначно записывается в виде $f(y)dx + (g(y)+xh(y))dy$.

c) дифференциальные формы $\frac{dx}{y}$ на D_y и $-\frac{dy}{x}$ на D_x согласованы на D_{xy}.

d) Запишите дифференциальную форму из пункта c) в виде b).

4. Рассмотрим эллиптическую кривую $E \subset \mathbb{P}^2$, заданную уравнением $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$, где $\mathsf{k} \ni \lambda \neq 0, 1$ — параметр. В карте $D_z \cap E$ рассмотрим дифференциальную форму $\omega = \frac{dx}{y}$. Докажите, что

a) ω регулярна на $D_z \cap E$.

b) ω (однозначно) продолжается до регулярной дифференциальной формы на всей E.

c) ω не обращается в 0 нигде на E.

d) Всякая глобальная регулярная дифференциальная форма на E получается из ω умножением на константу.

5. Докажите, что всякая алгебраическая группа всюду гладка.

Задачи к экзамену по алгебраической геометрии 2006

1. a) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая гиперэллиптическая кривая с полем функций $\mathsf{k}(X) = \mathsf{k}(x)[y]$, где $y^2 = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_{2g+2})$, а $\lambda_1,\dots,\lambda_{2g+2}$ — различные числа. Напишите в явном виде (в координатах x, y) базис в пространстве глобальных регулярных дифференциальных форм на X.

b) Каноническое линейное расслоение ω_X определяет отображение $\phi:\ X \to \mathbb{P}^{g-1}$. Докажите, что ϕ раскладывается в композицию двулистной проекции $\pi:\ X \to \mathbb{P}^1$, $(x,y) \mapsto x$ и вложения Веронезе $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$.

c) Докажите, что всякая кривая рода 1 или 2 гиперэллиптическая.

d) Докажите, что если кривая Y *не* гиперэллиптическая (т.е. не является двулистным накрытием $\mathbb{P}^1$), то ее каноническое отображение $\phi:\ Y \to \mathbb{P}^{g-1}$ является вложением.

e) Докажите, что любая гладкая квартика в $\mathbb{P}^2$ является негиперэллиптической кривой рода 3.

2. Пусть характеристика k равна 3, и кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ задана уравнением $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. В двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^2$ (состоящем из прямых в исходном $\mathbb{P}^2$) есть двойственная кривая X^*, состоящая из касательных к X.

a) Докажите, что X неособа, но каждая точка X является точкой перегиба (т.е. касательная в ней имеет кратность пересечения больше 2).

b) Докажите, что X^* изоморфна X, а естественное отображение $X \to X^*$ (точка переходит в касательную в этой точке) чисто несепарабельно.

c) Докажите, что группа автоморфизмов X равна $PSL_2(\mathbb{F}_7)$.

3. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрика, изоморфная $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

a) Докажите, что $Pic(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, т.е. любое линейное расслоение на Q имеет вид $\mathcal{O}(a,b) := pr_1^*\mathcal{O}(a) \otimes pr_2^*\mathcal{O}(b)$, а любой дивизор имеет тип (a,b).

b) Докажите, что если $|a-b| \leq 1$, то $H^1(Q, \mathcal{O}(a,b)) = 0$; если $a, b < 0$, то $H^1(Q, \mathcal{O}(a,b)) = 0$; если $a \leq -2$, то $H^1(Q, \mathcal{O}(a,0)) \neq 0$. Выведите отсюда, что любой эффективный дивизор типа (a,b) при $a, b > 0$ связен.

c) Докажите, что для любых $a, b > 0$ есть неособая связная кривая $X \subset Q$ типа (a,b).

d) Докажите, что род X равен $ab - a - b + 1$. В частности, для $(a,b) = (g+1, 2)$ получаем род g.

e) Докажите, что X проективно нормальна (т.е. отображение ограничения из однородного координатного кольца $\mathbb{P}^3$ в однородное координатное кольцо X сюръективно) тогда и только тогда, когда $|a-b| \leq 1$. В частности, X типа $(1,3)$ (рациональная кривая степени 4) не является проективно нормальной в $\mathbb{P}^3$.

Рождественские задачи по алгебраической геометрии 2006

1. Пусть кривая $\overline{X}$ рода g определена над полем $\mathbb{F}_q$ (а основное поле $\mathsf{k} = \overline{\mathbb{F}}_q$). Пусть N_r — число точек $\overline{X}$, рациональных над $\mathbb{F}_{q^r}$. Докажите, что $N_r = 1 - a_r + q^r$, где $|a_r| \leq 2g\sqrt{q^r}$.

Указание: примените неравенство Кастельнуово-Севери к графикам морфизма Фробениуса $Fr^r : \overline{X} \to \overline{X}$ и тождественного морфизма.

2. Напомним, что дзета функцию $\zeta_X(s) = Z(X; t = q^{-s})$ можно определить как произведение $\prod_{x \in |X|}(1 - t^{\deg(x)})^{-1}$ по множеству $|X|$ орбит Fr в множестве точек $\overline{X}$; наконец, $\deg(x)$ равно числу точек орбиты. Напомним, что $Z(X;t) = P_1(t)P_0(t)^{-1}P_2(t)^{-1}$, где $P_0(t) = 1 - t$; $P_2(t) = 1 - qt$, а $P_1(t) = \prod_{i=1}^{2g}(1 - \alpha_i t)$. Докажите, что (в терминах первой задачи) $a_r = \sum_{i=1}^{2g}(\alpha_i)^r$.

3. Докажите, что условие $a_r \leq 2g\sqrt{q^r}$ для всех r равносильно условию $|\alpha_i| \leq \sqrt{q}$ для всех i.

4. Из функционального уравнения $Z(X; (qt)^{-1}) = q^{1-g}t^{2-2g}Z(X;t)$ выведите, что $|\alpha_i| = \sqrt{q}$ для любого i.

5. Теперь докажем рациональность дзета-функции, упомянутую в задаче 2.

a) Докажите, что $Z(X,t) = \sum_D t^{\deg D}$, где сумма берется по всем эффективным дивизорам на $\overline{X}$, определенным над $\mathbb{F}_q$ — то есть по положительным линейным комбинациям сумм точек в орбитах из $|X|$.

b) Докажите, что число определенных над $\mathbb{F}_q$ эффективных дивизоров, линейно эквивалентных данному D, равно $(q^{h_0(D)} - 1)(q-1)^{-1}$, где $h_0(D) := \dim H^0(\overline{X}, \mathcal{O}(D))$.

c) Докажите, что число классов линейной эквивалентности дивизоров степени 0, определенных над $\mathbb{F}_q$, конечно. Оно обозначается h.

d)* Если можете, докажите, что есть дивизор степени 1, определенный над $\mathbb{F}_q$. Если не получается, пользуйтесь этим утверждением как черным ящиком и докажите, что число классов линейной эквивалентности дивизоров произвольной степени n, определенных над $\mathbb{F}_q$, равно h.

e) Докажите, что $Z(X;t) = P_1(t)P_0(t)^{-1}P_2(t)^{-1}$, где $P_0(t) = 1 - t$; $P_2(t) = 1 - qt$, а $P_1(t) = \prod_{i=1}^{2g}(1 - \alpha_i t)$.
Указание: В сумме пункта a) сгруппируйте члены по классам линейной эквивалентности и воспользуйтесь тем, что для $\deg D > 2g - 2$ имеем $h^0(D) = \deg D + 1 - g$.

f) Докажите, что $Z(X; (qt)^{-1}) = q^{1-g}t^{2-2g}Z(X;t)$. *Указание:* Двойственность Серра.

6. Пусть $\pi: \ E_1 \to E_2$ — гомоморфизм из одной эллиптической кривой в другую (конечное отображение, гомоморфизм групп) степени d. Обратный образ линейных расслоений задает гомоморфизм $\pi^*: \ E_2 = Pic^0(E_2) \to Pic^0(E_1) = E_1$. Докажите, что

a) $\pi \circ \pi^* = d$ (умножение на число d в группе E_2).

b) Если $E_1 = E_2$ и π есть умножение на число c в группе E_1, то π^* тоже есть умножение на число c.

c) $\pi_1^* \circ \pi_2^* = (\pi_2 \circ \pi_1)^*$.

d) $(\pi^*)^* = \pi$.

e) $(\pi + \varpi)^* = \pi^* + \varpi^*$, если $\pi + \varpi \neq 0$.