Задачи к экзамену по алгебраической геометрии 2006

1. a) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — гладкая гиперэллиптическая кривая с полем функций $\mathsf{k}(X) = \mathsf{k}(x)[y]$, где $y^2 = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_{2g+2})$, а $\lambda_1,\dots,\lambda_{2g+2}$ — различные числа. Напишите в явном виде (в координатах x, y) базис в пространстве глобальных регулярных дифференциальных форм на X.

b) Каноническое линейное расслоение ω_X определяет отображение $\phi\colon\ X \to \mathbb{P}^{g-1}$. Докажите, что ϕ раскладывается в композицию двулистной проекции $\pi:\ X \to \mathbb{P}^1$, $(x, y) \mapsto x$ и вложения Веронезе $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$.

c) Докажите, что всякая кривая рода 1 или 2 гиперэллиптическая.

d) Докажите, что если кривая Y *не* гиперэллиптическая (т.е. не является двулистным накрытием $\mathbb{P}^1$), то ее каноническое отображение $\phi\colon\ Y \to \mathbb{P}^{g-1}$ является вложением.

e) Докажите, что любая гладкая квартика в $\mathbb{P}^2$ является негиперэллиптической кривой рода 3.

2. Пусть характеристика k равна 3, и кривая $X \subset \mathbb{P}^2$ задана уравнением $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. В двойственном проективном пространстве $\check{\mathbb{P}}^2$ (состоящем из прямых в исходном $\mathbb{P}^2$) есть двойственная кривая X^*, состоящая из касательных к X.

a) Докажите, что X неособа, но каждая точка X является точкой перегиба (т.е. касательная в ней имеет кратность пересечения больше 2).

b) Докажите, что X^* изоморфна X, а естественное отображение $X \to X^*$ (точка переходит в касательную в этой точке) чисто несепарабельно.

c) Докажите, что группа автоморфизмов X равна $PSL_2(\mathbb{F}_7)$.

3. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрика, изоморфная $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

a) Докажите, что $Pic(Q) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, т.е. любое линейное расслоение на Q имеет вид $\mathcal{O}(a, b) := pr_1^*\mathcal{O}(a)\otimes pr_2^*\mathcal{O}(b)$, а любой дивизор имеет тип (a, b).

b) Докажите, что если $|a - b| \le 1$, то $H^1(Q, \mathcal{O}(a, b)) = 0$; если $a, b < 0$, то $H^1(Q, \mathcal{O}(a, b)) = 0$; если $a \le -2$, то $H^1(Q, \mathcal{O}(a, 0)) \neq 0$. Выведите отсюда, что любой эффективный дивизор типа (a, b) при $a, b > 0$ связен.

c) Докажите, что для любых $a, b > 0$ есть неособая связная кривая $X \subset Q$ типа (a, b).

d) Докажите, что род X равен $ab - a - b + 1$. В частности, для $(a, b) = (g + 1, 2)$ получаем род g.

e) Докажите, что X проективно нормальна (т.е. отображение ограничения из однородного координатного кольца $\mathbb{P}^3$ в однородное координатное кольцо X сюръективно) тогда и только тогда, когда $|a - b| \le 1$. В частности, X типа $(1, 3)$ (рациональная кривая степени 4) не является проективно нормальной в $\mathbb{P}^3$.