Лекция 1. Топологические пространства

В школьном курсе вам объясняли (по крайней мере, на интуитивном уровне), что такое предел, непрерывная функция и действительное число. В продвинутых курсах анализа определяются общие понятия предела и непрерывности, а также строится строгая теория действительных чисел. Построением этой последней теории мы займемся не прямо сейчас, а на второй-третьей лекции, но пользоваться (в примерах) множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел начнем сразу (порочного круга, как вы убедитесь, при этом не возникнет).

Вот первый шаг к общим понятиям непрерывности и предела.

Определение 1.1. *Топологическим пространством* называется множество X, в котором выделено семейство подмножеств, называемых *открытыми*, удовлетворяющее следующим условиям:

1) Само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются открытыми множествами.

2) Объединение любого семейства открытых множеств открыто.

3) Пересечение двух открытых множеств открыто.

Начнем с того, что введем топологию на самом множестве $\mathbb{R}$:

Пример 1.2 (стандартная топология на $\mathbb{R}$). Назовем подмножество $U \subset \mathbb{R}$ открытым, если оно удовлетворяет следующему условию: для каждой точки $x \in U$ существует такое (действительное) число $\varepsilon > 0$, что все y, удовлетворяющие условию $|y - x| < \varepsilon$, также лежат в U.

Неформально говоря, множество открыто, если вместе с каждой точкой оно обязательно содержит и все достаточно близкие к ней. Проверьте самостоятельно, что при таком определении открытых множеств аксиомы 1–3 топологического пространства действительно выполнены.

Если на множестве X задана топология, то она задана и на всяком его подмножестве:

Определение 1.3. Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$ — подмножество. Введем на Y топологию, объявив его открытыми подмножествами все множества вида $U \cap Y$, где U — открытое подмножество пространства X. Получающаяся топология называется топологией на Y, *индуцированной* с топологии на X.

Тривиально проверяется, что набор подмножеств в Y, построенный в соответствии с этим определением, удовлетворяет аксиомам открытых множеств топологического пространства. В частности, топологией оказывается снабженным любое подмножество в $\mathbb{R}$

Вот еще один пример топологического пространства.

Пример 1.4 (дискретная топология). Пусть X — произвольное множество. Объявим *все* его подмножества открытыми. Тогда, очевидно, аксиомы топологического пространства будут выполнены. Такое топологическое пространство называется *пространством с дискретной топологией.*

Ввиду аксиомы 2 топологических пространств, для дискретности пространства достаточно, чтобы все его одноточечные подмножества были открыты.

Сами по себе дискретные топологии неинтересны, но такое топологическое пространство может возникнуть в результате проведения какой-то конструкции, и вот на этот случай полезно иметь для него специальный термин.

Пример 1.5. Пусть $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ — множество целых чисел (обозначение $\mathbb{Z}$ является стандартным). Тогда стандартная топология на $\mathbb{R}$ индуцирует на $\mathbb{Z}$ дискретную топологию.

Много разумных примеров топологических пространств получается из следующей конструкции:

Определение 1.6. *Метрическим пространством* называется множество X, на парах точек которого задана функция ρ (с вещественными значениями), удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых x и y, и $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Величина $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между x и y, а сама функция ρ часто называется *метрикой.*

Пример метрического пространства — множество $\mathbb{R}$, в котором метрика задана формулой $\rho(x, y) = |x - y|$. Другие примеры — пространство или плоскость, в котором ρ — обычное расстояние между точками. В этих примерах аксиома 3 сводится к обычному «неравенству треугольника»; в общем случае ее тоже называют неравенством треугольника.

Коль скоро X — метрическое пространство, на любом подмножестве $Y \subset X$ функция ρ также индуцирует метрику, так что любое подмножество метрического пространства автоматически является метрическим пространством.

Рассмотрим дальнейшие примеры. Пусть $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел («координат») $(x_1, \dots, x_n)$; это множество называется *n-мерным координатным пространством* (или просто n-мерным пространством, если не грозит путаница). При $n = 2$ это плоскость, при $n = 3$ — «обычное» (трехмерное) пространство. На $\mathbb{R}^n$ можно ввести (среди прочих) такие метрики:

L^p-метрика: зафиксируем вещественное число $p \geqslant 1$; если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, то положим $\rho_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{1/p}$.

L^∞-метрика: если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, то положим $\rho_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|)$.

Для L^1- и L^∞-метрик проверка аксиом метрического пространства тривиальна. Для L^p-метрики при $p > 1$ доказательство неравенства треугольника немного сложнее; вы познакомитесь с ним на упражнениях.

На каждом метрическом пространстве можно естественным способом ввести топологию.

Обозначение 1.7. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ; тогда для точки $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ положим

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Множество $B_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* с центром x и радиусом ε.

Определение 1.8. Пусть X — метрическое пространство. Подмножество $U \subset X$ называется открытым, если для всякой точки $x \in U$ существует открытый шар с центром в x, содержащийся в U (т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$).

Очевидно, что так определенный набор открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологического пространства; проверьте также, что открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством, и тем самым такое употребление слова «открытый» не является двусмысленным (для этого придется воспользоваться неравенством треугольника). Проверьте, наконец, что топология, задаваемая на $\mathbb{R}$ метрикой, совпадает со стандартной топологией.

Различные метрики могут задавать одну и ту же топологию на данном множестве X. Вот важный пример.

Пример 1.9. Все L^p-метрики ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) задают на $\mathbb{R}^n$ одну и ту же топологию.

Доказательство. Легко видеть, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства

$$\rho_\infty(x, y) \leqslant \rho_p(x, y) \leqslant n^{1/p} \cdot \rho_\infty(x, y).$$

Из этого неравенства вытекает, что для всякого $x \in \mathbb{R}^n$ и всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$B_{\varepsilon,\rho_p}(x) \subset B_{\varepsilon,\rho_\infty}(x) \subset B_{n^{1/p}\varepsilon,\rho_p}(x),$$

так что подмножество в $\mathbb{R}^n$ является открытым относительно L^p-метрики, где $p < \infty$, тогда и только тогда, когда оно открыто относительно L^∞-метрики. $\square$

Чтобы задать на множестве топологию, не обязательно перечислять все открытые множества. Часто используется следующий способ:

Определение 1.10. *Базой открытых множеств* на множестве X называется семейство его подмножеств, обладающее следующим свойством: если $V_1 \subset X$ и $V_2 \subset X$ принадлежат базе, то $V_1 \cap V_2$ является объединением некоторого (может быть, бесконечного) семейства множеств из базы.

Если на множестве X задана база открытых множеств, то *топология, заданная с помощью этой базы* определяется так: открытыми множествами объявляются подмножества $U \subset X$, представимые в виде объединения некоторого (возможно, бесконечного) семейства множеств из базы, а также $\varnothing$ и всё X.

Проверьте самостоятельно, что описанная конструкция действительно задает топологию на X. В метрическом пространстве X с метрикой ρ множества вида $B_\varepsilon(x)$ при всевозможных $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ образуют базу открытых множеств, для топологии, заданной метрикой. Более того, достаточно рассматривать только множества $B_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon < 1$ (или, скажем, $\varepsilon < 1/2006$): они также образуют базу открытых подмножеств, и эти базы задают все ту же топологию.

Проверьте также, что стандартную топологию на $\mathbb{R}$ можно задать с помощью базы открытых множеств вида $(p;q)$, где p и q — рациональные числа.

Приведем пример, в котором топология задается без помощи метрики.

Пример 1.11 (треугольники на плоскости). Пусть T — множество треугольников на плоскости (мы рассматриваем треугольник просто как геометрическую фигуру, без учета порядка вершин). Введем на нем топологию. Как водится, подмножество $U \subset T$ будет открытым если, неформально говоря, вместе с каждым треугольником оно содержит все «близкие» к нему. Формализуется это следующим образом. Для каждого треугольника $\Delta \in T$ и каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество $U(\Delta, \varepsilon) \subset T$, состоящее из всех треугольников Δ', обладающих следующим свойством: вершины треугольников Δ и Δ' можно занумеровать так, что расстояния между вершинами треугольников Δ и Δ' с одинаковыми номерами будут все́ меньше ε. Проверьте самостоятельно, что множества вида $U(\Delta, \varepsilon) \subset T$ образуют базу открытых подмножеств; определяемая ей топология — это и есть та топология на пространстве треугольников, которую мы хотели ввести.

Вот еще одно простое, но фундаментальное определение.

Определение 1.12. Пусть X — топологическое пространство. Подмножество $F \subset X$ называется *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus F \subset X$ открыто.

Следующее утверждение мгновенно вытекает из определения 1.1.

Предложение 1.13. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда:*

1) *Само пространство X и пустое подмножество $\varnothing$ являются замкнутыми множествами.*

2) *Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.*

3) *Объединение двух замкнутых множеств замкнуто.*

Определение 1.14. Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда *замыканием* множества M называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M.

Замыкание множества M обычно обозначается $\bar{M}$. Ввиду пункта (2) предыдущего предложения замыкание любого множества будет замкнуто.

Неформальный смысл понятия замыкания таков: при переходе от множества M к его замыканию $\bar{M}$ мы добавляем к множеству M все те точки x, которые сами в M не лежат, но, тем не менее, «сколь угодно близко от x» точки множества M имеются; если таких точек x не найдется, то множество M является замкнутым.

Точный смысл предыдущему абзацу придает следующее

Предложение 1.15. *Пусть X — топологическое пространство и $M \subset X$. Тогда $\bar{M}$ состоит из всех точек $x \in X$, обладающих следующим свойством:*

$$\text{Для всякого открытого подмножества } U \ni x \text{ имеем } U \cap M \neq \varnothing. \qquad (*)$$

Доказательство. Пусть $x \in \bar{M}$; по определению, это равносильно тому, что для всякого замкнутого множества $F \supset M$ имеем $F \ni x$. Поскольку замкнутые множества — это дополнения открытых, последнее условие можно, обозначая $U = X \setminus F$, переписать так: для всякого открытого подмножества $U \subset X$ такого, что $U \cap M = \varnothing$, имеем $U \not\ni x$, или, эквивалентно: если открытое множество U содержит x, то $U \cap M \neq \varnothing$. Но это и есть условие $(*)$. □

Закончим эту лекцию еще одним важным определением.

Определение 1.16. Пусть X — топологическое пространство и $x \in X$. *Окрестностями* точки x называются открытые множества, содержащие x.

Предложение 1.17. *Пусть X — топологическое пространство; подмножество в X является открытым тогда и только тогда, когда вместе с каждой точкой оно содержит какую-то ее окрестность.*

Доказательство. Если множество вместе с каждой своей точкой x содержит ее окрестность U_x, то оно является объединением этих U_x и тем самым открыто как объединение открытых множеств. Если же, напротив, множество открыто, то оно является окрестностью каждой из своих точек. □